# مقارنة مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة مع العزوم التقليدية لتوزيع دالة القوى ذي المعلمتين

**أ.م.د. جنان عباس ناصر**

قسم تقنيات معلوماتية – الكلية التقنية الإدارية– بغداد

**المستخلص**

في هذا البحث استخدمت طرائق العزوم لاشتقاق مقدرات معلمتي الشكل والقياس لتوزيع دالة القوى، التي تضمنه طريقة العزوم (MOM) والعزوم –L (L-MOM) والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول (IPWM1) المتحيزة (U-IPWM1) وغير المتحيزة (B-IPWM1) والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني المقترح استخدامها ((IPWM2(proposed.) المتحيزة ((U-IPWM2(proposed) وغير المتحيزة ((B-IPWM2(proposed).تم استعمل عدة نماذج من توزيع دالة القوى لتوليد البيانات ، لإحجام عينات مختلفة (الصغيرة والمتوسطة والكبيرة). استحصلت النتائج باستخدام أسلوب المحاكاة ببرامج مكتوبة ببرنامج Matlab . لمقارنة أداء الطرائق المستخدمة في هذا البحث، فقد اعتمد معيار متوسط مربع الخطأ (MSE) ومعيار الانحراف الكلي (TD) لمقدرات معلمتي توزيع دالة القوى كمعيار لمقارنة الأداء للطرائق المستخدمة. تبين نتائج البحث وفقا للمعيارين بان طريقة التقدير المقترحة للعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني الافضل بين طرائق التقديرالمستخدمه ، فعلى الرغم من إن طريقتي العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول والثاني أعطت نتائج متشابهة لتقدير معلمتي التوزيع ومعيار متوسط مربع الخطأ (MSE) ،إلا إن طريقة التقدير المقترحة للعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني أعطت اقل قيمة لمعيار الانحراف الكلي (TD) مقارنة بكل طرائق التقدير المستخدمة في البحث، لكل العينات والحالات .

**الكلمات المفتاحية** : توزيع دالة القوى ،خصائص توزيع دالة القوى،مقدرات العزوم ،مقدرات العزوم L-، مقدرات العزوم الاحتمالية من النوع الأول الغير متحيزة والمتحيزة ، مقدرات العزوم الاحتمالية من النوع الثاني المقترحة الغير متحيزة والمتحيزة.

## 1.المقدمة

يعد توزيع دالة القوى من التوزيعات الشائعة الاستخدام لنمذجت البيانات الاقتصادية والاجتماعية ،وبسبب اهميتة وكثرة استخدامه،من هنا تأتي أهمية طرائق تقدير معلمتي توزيع دالة القوى، ونتناول في هذا البحث عدة طرائق لتقدير معلمتي توزيع دالة القوى متضمنة طريقة العزوم وطريقة العزوم –L التي قدمت من قبل Sillitlo عام 1959،إذ تعتمد طريقة L-MOM على

quantiles الدوال التقريبية لدالة التوزيع التجميعية،التي يمكن تقديرها بتوليفات خطية للإحصاءات المرتبة–L.وكذلك طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) [1,2].وقد تناول العديد من الباحثين دراسة هذا التوزيع وبجوانب مختلفة لهذا التوزيع نذكر بعض منهم بإيجاز تجنبا للإطالة :– فقد قدم Greenwood [3] عام (1979) طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) التي استعملت في العديد من البحوث والتطبيقات، لتقدير المعلمات لعدة توزيعات احتمالية،التي يمكن التعبير عن دالة التوزيع التراكمية (cdf) بصيغة معكوسة.وقارن Landwehr [4] و آخرون معه عام (1979) طريقة تقديرالـ PWM مع بعض الأساليب التقديرالتقليدية متضمنة مقدرات الإمكان الأعظم ومقدرات العزوم لتوزيع كامبل،وتحرى عن خصائص مقدرات العينة الصغيرة ومقدرات الـ quantiles الدوال التقريبية لدالة التوزيع التجميعية.وتوصلوا إلى إن طريقة تقديرالـ PWM كانت الأفضل مقارنة ببقية طرائق التقدير التقليدية (الإمكان الأعظم و العزوم).واشتق Hosking [5] وآخرون معه عام (1985) مقدرات لمعلمات توزيع القيمة المتطرفة المعمم.وكذلك مقدرات الـ quantiles الدوال التقريبية لدالة التوزيع التجميعية، وتحروا عن خصائص تلك المقدرات في العينات الكبيرة ،باستخدام النظرية المحاذية وكذلك في العينات الصغيرة والمتوسطة باستخدام المحاكاة.وتوصلوا إلى إن مقدرات الـ PWMأعطت اقل تباين وبدون تحيز مقارنة مع مقدرات الإمكان الأعظم. واستخدم Cunnane [6] عام (1989) الصيغة $\mathbf{P^{j}_{nex,i} = P_{nex,i} = (i - 0.4)/(n + 2)}$ في التحليل للتوزيعات إحصائية لتحليل تردد الفيضان.كما درس Hosking [1,2] في عامي 1986 و 1990 طريقة العزوم –L بشكل أوسع لتقدير معلمات بعض من التوزيعات الاحتمالية الإحصائية.إذ تكون هذه الطريقة عبارة عن دوال خطية لتوقعات الإحصاءات المرتبة،وتعد نظام بديل لوصف إشكال التوزيعات الاحتمالية.وتمتاز L-MOM بأنها تنتج تقديرات أكثر دقة ورصينة لمعلمات التوزيع الاحتمالي مقارنة بطرائق التقديرالاخرى،فضلا عن سهولة استخدامها حسابيا مقارنة بطريقة الإمكان الأعظم .واشتق Saran [7] عام (2004) مقدرات خطية غير متحيزة لتوزيع القوى بثلاث معلمات بالاعتماد على القيم المسجلة رقم k .ثم قدم Chang [8] عام (2007) تمثيل دالة توزيع القوى بالقيم المسجلة الدنيا المستقلة وبين بان $\mathbf{v > 0} \quad \forall \quad \mathbf{x \in power\ (1, v)}$ ،إذا وفقط إذا كانت $\dfrac{\mathbf{X_{L(n)}}}{\mathbf{X_{L(n)} - X_{L(n+1)}}}$ و $\mathbf{X_{L(n)}}$ مستقلين لحجم عينة اكبرأو تساوي واحد $\mathbf{(n \geq 1)}$ .وبرهن بان $\mathbf{v > 0} \quad \forall \quad \mathbf{x \in power\ (1, v)}$ ،إذا وفقط إذا كان $\dfrac{\mathbf{X_{L(n+1)}}}{\mathbf{X_{L(n)} - X_{L(n+1)}}}$ و $\mathbf{X_{L(n)}}$ مستقلين لحجم عينة $\mathbf{(n \geq 1)}$ .واستنتج بان

$\forall \; v > 0$ ، $x \in power\ (1, v)$ إذا وفقط إذا كان $\frac{X_{L(n)} + X_{L(n+1)}}{X_{L(n)} - X_{L(n+1)}}$ و $X_{L(n)}$ مستقلين لـ $(n \geq 1)$. كما افترض Sinha [9] وآخرون معه عام (2008) مقدرات اختبار تمهيدي لمعلمة القياس لتوزيع دالة القوى عندما تكون معلمة القياس مساوية لـ $(\theta^{-1})$،عندما تتوفر قيمة تخمين نقطة حول معلمة القياس $(\theta)$،بافتراض إن معلمة الشكل تكون معلومة.وقد اعتمدوا على معيار الكفاءة النسبية للمقارنة بين المقدرات الاعتيادية.وتناول Hamdan [10] عام (2009) خصائص العزوم –L مقارنة بالعزوم التقليدية لعدة توزيعات منها التوزيع المنتظم والتوزيع اللوجستي وتوزيع القيمة المتطرفة .ثم قام Haseeb و Mohad [11] عام (2011) باشتقاق العلاقات التكرارية للعزوم المفردة وعزوم مضروبات المتغيرات ضمن (single and product) الإحصاءات المرتبة المعممة الدنيا لتوزيع دالة القوى،فضلا عن وضع صيغ لتلك العزوم.واستخدم Tanveer [12] وآخرون معه عام (2012) أسلوب بيز لتوزيع دالة القوى عندما تكون معلمة القياس مساوية للواحد.وقد اشتق التوزيع اللاحق لمعلمة الشكل تحت افتراض بان التوزيع الأولي لمعلمة الشكل يخضع لتوزيع Gamma وتوزيع Rayleigh،وكذلك استخدم Jeffery's prior وكذلك التوزيع المنتظم بالفترة صفر و واحد ((U~(0,1)).وللمقارنة بين مقدرات بيز المستحصلة وفقا للتوزيعات الأولية المفترضة فقد اعتمدوا على تقديرات الفترة لنقاط (مقدرات) بيز والتباينات اللاحقة والالتواء والتفلطح فضلا عن اعتماد دوال مخاطرة بيز اللاحقة كمعيار للمقارنة بين مقدرات بيز.وقام Azam [13] وآخرون معه عام (2013) بتقدير معلمتي توزيع دالة القوى باستخدام تحويرات مقدرات الإمكان الأعظم والعزوم وكذلك عزم percentile باستخدام ثلاث صيغ لدالة التوزيع التراكمية (cdf) متضمنة رتبة الوسيط ورتبة المتوسط ودالة cdf المتماثلة.وقد استخدموا المحاكاة لغرض المقارنة بين طرائق التقدير بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ والتحيز والانحراف الكلي لمقدرات معلمتي توزيع دالة القوى.واستنتجوا بان المقدرات المحورة لمعلمتي التوزيع دالة القوى كانت أفضل مقارنة بالمقدرات الاعتيادية.وتناول Zahid [14] وآخرون معه عام (2013) تقدير معلمتي توزيع دالة القوى باستخدام أربعة عزوم خطية مختلفة،وهي العزوم – L والعزوم –TL التي تفترض بان تقديرات العزوم ممكنه حتى وان كان متوسط التوزيع الاحتمالي غير موجود أو غير محدد،وكذلك العزوم –LL التي تفترض أوزان اكبر للمشاهدات الصغيرة في العينة،وأخير العزوم –LH التي تعطي أهمية للمشاهدات الأكبر في العينة.وقد استخدموا المحاكاة لغرض المقارنة بين طرائق التقدير باستخدام العزوم الأربعة المتقدم ذكرها بالاعتماد على معيار جذر متوسط مربعات الخطأ والتحيز لمقدرات معلمتي توزيع دالة القوى.واستنتجوا بان العزوم –TL تعطي اقل قيمة لجذر متوسط مربعات الخطأ والتحيز لمقدرات معلمتي توزيع لكل إحجام العينات الصغيرة

والكبيرة.وناقش Ahsanullah [15] وآخرون معه عام (2013) تمثيل جديد لتوزيع دالة القوى بالاعتماد على القيم المسجلة الدنيا (Lower records)على أمل إن تكون تلك النتائج مفيدة للباحثين في العديد من المجالات التطبيقية.

وبناءا على ماتقدم فان هدف البحث هوالمقارنة بين طرائق تقديرمعلمتي الشكل والقياس لتوزيع دالة القوى، متضمنة طريقة العزوم (MOM) والعزوم L– (L-MOM) والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول (IPWM1) المتحيزة (U-IPWM1) وغير المتحيزة (B-IPWM1) والعزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني المقترح استخدامها (IPWM2) المتحيزة (U-IPWM2) وغير المتحيزة (B-IPWM2)،وقد اعتمد معيارمتوسط مربع الخطأ (MSE) ومعيار الانحراف الكلي (TD) لمقدرات معلمتي التوزيع للمقارنة بين تلك الطرائق المستخدمة في البحث من خلال استخدام المحاكاة ولإحجام مختلفة من العينات.

## 2. خواص توزيع دالة القوى Properties of The Power Function Distribution

يعد توزيع دالة القوى من التوزيعات الشائعة الاستخدام لنمذجت البيانات الاقتصادية لتمثيل توزيع نموذج الدخل والبيانات الاجتماعية والبيانات المتعلقة بالمناخ وكذلك البيانات المتعلقة بأوقات البقاء وأوقات الفشل لأي من المعدات الالكترونية. وان خصائص هذا التوزيع كالأتي [16,14]:

يقال إن المتغير العشوائي t يتوزع وفق توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$،إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية ( pdf ) وفق الصيغة الآتية :

$$f(t) = \frac{\gamma}{\beta^{\gamma}} t^{\gamma-1}, \quad 0 < t < \beta \qquad ...(1)$$

إذ إن $\gamma > 0$تمثل معلمة الشكل (Shape parameter)،و $\beta > 0$ تمثل معلمة القياس (Scale parameter).وتكون دالة التوزيع التراكمية (cdf) وفق الصيغة الآتية:

$$F(t) = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\gamma} \qquad ...(2)$$

إما الوسط الحسابي للتوزيع يكون وفق الصيغة الآتية:

$$E(t) = \frac{\beta\ \gamma}{\gamma+1} \qquad ...(3)$$

والتباين للتوزيع يكون وفق الصيغة الآتية:

$$Var(t) = \frac{\beta^2\ \gamma}{(\gamma+1)^2(\gamma+2)} \qquad ...(4)$$

إما العزوم المركزية من الرتبة r للتوزيع تكون وفق الصيغة الآتية:

$$E(t^r) = \frac{\beta^r \gamma}{(\gamma + r)} \quad , r = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots(5)$$

## 3. طرائق التقدير Estimation Methods

### 3.1 طريقة العزوم Method of Moments (MOM)

في هذه الطريقة يتم ايجاد عزوم التوزيع للمجتمع أولا ومن ثم مساواتها بعزوم العينة المناظرة لها،وذلك بجعل معلمتي توزيع دالة القوى دالتين (احصائتين) من مشاهدات العينة وكما مبين في أدناه [16]:

وان العزم من الرتبة r للمجتمع يكون وفق الصيغة الآتية :

$$M_r = ET^r \qquad \ldots(6)$$

وان العزم من الرتبة r للعينة يكون وفق الصيغة الآتية :

$$m_r = (1/n)\sum_{i=1}^{n} t^r \qquad \ldots(7)$$

وبمساواة العزمين للمجتمع والعينة نحصل على :

$$M_r = m_r \qquad \ldots(8)$$

أولا : إن العزم الأول (r=1 في الصيغتين 5 و 6)ماهو إلا عبارة عن المتوسط للمجتمع.

$$M_1 = ET^1 = \mu = \frac{\beta \gamma}{\gamma + 1}$$

وان متوسط العينة (العزم الأول) يكون بتعويض (r=1) في الصيغة (7)وفق الصيغة الآتية:

$$m_1 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} t = \bar{t}$$

وبمساواة العزمين للمجتمع وللعينة وبالاعتماد على عزوم توزيع دالة القوى إي $\hat{M}_1 = m_1$ ،إي إن $\bar{t} = \hat{\beta}(\hat{\gamma}/(\hat{\gamma}+1))$ ،وبذلك فان مقدر معلمة القياس يكون وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\beta} = \bar{t}\,((\hat{\gamma}+1)/\hat{\gamma}) \qquad \ldots(9)$$

ثانيا : إن العزم الثاني ( r=2 في الصيغة 6 ) للمجتمع سيكون كالأتي :

$$M_2 = ET^2 = Var(t) + (E(t))^2 \qquad \ldots(10)$$

وبتعويض الصيغة (4) بالصيغة (10) نحصل على

$$M_2 = \frac{\beta^2 \gamma}{(\gamma+1)^2(\gamma+2)} + (\mu)^2$$

وان العزم الثاني للعينة يكون بتعويض ( r=2) في الصيغة (7 )وفق الصيغة الآتية :

$$m_2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

وبمساواة العزمين للمجتمع وللعينة إي $\hat{M}_2 = m_2$ وبالاعتماد على عزوم توزيع دالة القوى إي إن

$$\frac{\hat{\beta}^2\ \hat{\gamma}}{(\hat{\gamma}+1)^2(\hat{\gamma}+2)} + (\hat{\mu})^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \qquad ...(11)$$

وبالتعويض عن $\hat{\mu} = \bar{t}$ بالصيغة (11) والتبسيط نحصل على

$$\frac{\hat{\beta}^2\ \hat{\gamma}}{(\hat{\gamma}+1)^2(\hat{\gamma}+2)} = S^2 \qquad ...(12)$$

حيث إن $S^2 = [(1/n)\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\bar{t})^2]$، وبتعويض $\hat{\beta}$ المبينة بالصيغة (9) في الصيغة (12) نحصل على

$$\frac{(\bar{t}(\hat{\gamma}+1)/\hat{\gamma})^2\ \hat{\gamma}}{(\hat{\gamma}+1)^2(\hat{\gamma}+2)} = S^2 \Rightarrow \frac{1}{\hat{\gamma}(\hat{\gamma}+2)} = \frac{S^2}{\bar{t}^2} \Rightarrow \bar{t}^2 = S^2(\hat{\gamma}^2 + 2\hat{\gamma})$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{t}^2}{S^2} = \hat{\gamma}^2 + 2\hat{\gamma} + 1 - 1 \Rightarrow \frac{\bar{t}^2}{S^2} = (\hat{\gamma}+1)^2 - 1 \Rightarrow (\hat{\gamma}+1)^2 = 1 + \frac{\bar{t}^2}{S^2} \qquad ... (13)$$

وبجذر طرفي للصيغة (13) نحصل على مقدر معلمة الشكل وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\gamma}+1 = \sqrt{1+\frac{\bar{t}^2}{S^2}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma} = \sqrt{1+\frac{\bar{t}^2}{S^2}} - 1 \qquad ... (14)$$

وبذلك فان تقديرمعلمتي توزيع دالة القوى ستكون وفق الصيغتين(9) و (14) لـ $\beta$ و $\gamma$ على التوالي.

## 3.2 طريقة العزوم– L Method of L- Moments (L-MOM)

يمكن تعريف طريقة L-MOM لآي متغير عشوائي (t) يمتلك عزم أول محدود، لتكن $t_{1:n} \le t_{2:n} \le t_{3:n} \le .... \le t_{n:n}$ الإحصاءات المرتبة لمشاهدات العينة العشوائية بحجم (n) سحبت من توزيع t.وان الصيغة العامة لإيجاد العزوم –L للمتغير العشوائي t تكون وفق الأتي [10,1]:

$$\lambda_r = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(t_{r-k:r}) \ , r = 1, 2, 3 ... \qquad ...(15)$$

وقد عرف Hosking(1990) [1] العزوم بالاعتماد على العزوم الاحتمالية الموزونة $(B_r)$ وفق الصيغة الآتية:

$$B_r = E(t(F)^r) = \int_0^1 t(F)\, F^r dF \quad , \; r = 0,1,2,3,... \qquad ...(16)$$

إذ تمثل $t(F)$ معكوس دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي t.وفي بحثنا هذا،ووفقا لمتغير العشوائي الذي يخضع لتوزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$،نعرف العزم الاول− L والثاني − L $(\lambda_r, r = 1,2)$باستخدام الصيغة (16) وفق الأتي:

$$\lambda_1 = B_0 \qquad ...(17)$$

$$\lambda_2 = 2B_1 - B_0 \qquad ...(18)$$

غالبا ما تكون العزوم −L مقدرة من عينة عشوائية بحجم n لمشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا ،و يرمز لها بـ $(\ell_r)$ و تكون عبارة عن توليفات خطية لمشاهدات العينة المرتبة و تتضمن معلومات حول معلمة الشكل والقياس وكذلك الالتواء و التفلطح للتوزيع الاحتمالي الذي سحبت منه العينة.ويمكن تعريف العزم −L من الرتبة ( r ) للعينة $(\ell_r)$وفق الأتي[18,10]:

$$\ell_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum \sum_{i \le i1 < i2 < ... ir \le n} r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} t_{ir-k:n} \;, r = 1,2,3... \qquad ...(19)$$

ويمكن تعريف $(\ell_r \;, r = 1,2)$بالاعتماد على الطريقة المباشرة لتقدير العزوم −L للعينة وفق الأتي[18]:

$$\ell_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_{(i:n)} = \bar{t} \qquad ...(20)$$

$$\ell_2 = \frac{1}{n} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left[ \binom{i-1}{1} - \binom{n-i}{1} \right] t_{(i:n)} \qquad ...(21)$$

وبذلك فان صيغ اشتقاق تقدير توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ستكون وفق الخطوات الآتية :

1. باستخدام دالة cdf لتوزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ وفق الصيغة (2)
2. نجد معكوس دالة cdf للتوزيع والتي تكون وفق الصيغة الآتية:

$$t(F) = \beta (F)^{1/\gamma} \qquad ...(22)$$

3. بتعويض الصيغة (22) بالصيغة (16) نحصل على أدناه

$$B_r = \int_0^1 t(F)\, F^r dF = \int_0^1 \beta (F)^{1/\gamma}\, F^r dF = \beta \int_0^1 F^{(1/\gamma)+r} dF$$

$$B_r = \beta\, Beta\left(\frac{1}{\gamma} + r + 1, 1\right) = \beta \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma} + r\right)\, \Gamma(1)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\gamma} + r\right)}$$

حيث إن $\Gamma(1) = 1$ لذا فان $B_r$ تصبح بالصيغة الآتية

$$B_r = \beta \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma}+r)}{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma}+r)} \quad r = 0,1 \qquad ...(23)$$

4. ايجاد $\lambda_2$و $\lambda_1$ بعد ايجاد $B_0$و $B_1$ من الصيغة (23) وبالاعتماد على الصيغتين (17) و (18)

$$\lambda_1 = B_0 = \beta \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})} \quad , \quad r = 0$$

وحيث إن $\Gamma(1+\frac{1}{\gamma}) = (1+\frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})$فان $\lambda_1$ ستكون مساوية لـ

$$\lambda_1 = \beta \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})} = \beta \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{(1+\frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})} = \beta \frac{1}{(1+\frac{1}{\gamma})}$$

$$\lambda_1 = B_0 = \frac{\beta\ \gamma}{(\gamma+1)} \qquad ...(24)$$

إما $B_1$ فإنها ستكون وفق الصيغة الآتية :

$$B_1 = \beta \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma}+1)}{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma}+1)} = \beta \frac{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(3+\frac{1}{\gamma})} \quad , \ r = 1$$

وحيث إن $\Gamma(2+\frac{1}{\gamma}) = (2+\frac{1}{\gamma})\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})$فان $B_1$ ستكون مساوية لـ

$$B_1 = \beta \frac{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})}{(2+\frac{1}{\gamma})\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})} = \beta\ \frac{1}{(2+\frac{1}{\gamma})} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \beta\ \frac{\gamma}{(2\gamma+1)} \qquad ...(25)$$

وبتعويض الصيغتين (24)و (25) بالعزم الثاني –L المبين بالصيغة (18) نحصل على

$$\lambda_2 = 2(\ \beta\ \frac{\gamma}{(2\gamma+1)}) - \frac{\beta\ \gamma}{(\gamma+1)} = \frac{2\beta\ \gamma(\gamma+1) - \beta\ \gamma(2\gamma+1)}{(2\gamma+1)(\gamma+1)}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\beta\ \gamma^2 + 2\beta\ \gamma - 2\beta\ \gamma^2 - \beta\ \gamma}{(2\gamma+1)(\gamma+1)} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\beta\ \gamma}{(\gamma+1)}(\frac{1}{(2\gamma+1)}) \qquad ...(26)$$

5. وللحصول على مقدرات معلمتي توزيع دالة القوى$(\beta, \gamma)$، يتم مساواة العزمين –Lالأول والثاني للمجتمع ($\lambda_1$و $\lambda_2$ )المبينة بالصيغتين (24)و(26) على التوالي مع العزمين –L الأول والثاني للعينة ($\ell_1$و $\ell_2$) المبينة بالصيغتين (20) و(21) على التوالي وكما مبين أدناه

بوضع $\lambda_1 = \ell_1$ نحصل على الصيغة التقديرية للمعلمة $\beta$ وكما مبين أدناه

$$\ell_1 = \hat{\beta}\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = \ell_1\left(\frac{\hat{\gamma}+1}{\hat{\gamma}}\right) \qquad \ldots(27)$$

بوضع $\lambda_2 = \ell_2$ نحصل على الصيغة التقديرية للمعلمة $\gamma$ وكما مبين أدناه

$$\ell_2 = \frac{\hat{\beta}\,\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+1}\left(\frac{1}{\hat{\gamma}+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = \ell_1\left(\frac{1}{2\hat{\gamma}+1}\right) \quad \Rightarrow \ell_2(2\hat{\gamma}+1) = \ell_1$$

$$2\ell_2\hat{\gamma} + \ell_2 = \ell_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2\ell_2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell_1}{\ell_2} - 1\right) \qquad \ldots(28)$$

وبتعويض قيمة $\hat{\gamma}$ المبينة بالصيغة (28) بالصيغة (27) نحصل على قيمة $\hat{\beta}$.

3.3 طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة Probability Weighted Moments Method (PWM)

يمكن تعريف العزوم الاحتمالية الموزونة (PWM) لأي متغير عشوائي ليكن ( t ) وفق الصيغة الآتية[3] :

$$\mu_{s,r,k} = E[t^s F^r (1-F)^k] = \int_0^1 [t(F)]^s F^r (1-F)^k dF \qquad \ldots(29)$$

إذ إن $F = F(t;\beta,\gamma)$ تمثل دالة التوزيع التراكمية (cdf) بالمعلمتين $(\beta,\gamma)$،وان $t(F) = t(F;\beta,\gamma)$تمثل معكوس دالة cdf بالمعلمتين $(\beta,\gamma)$.وان (k, r , s) تكون إعداد صحيحة موجبة .ويمكن الحصول على صيغتين بسيطة ومفيدة لتقدير العزوم الاحتمالية الموزونة للمجتمع من الصيغة (29) كما سيرد شرحها في أدناه.

أولا: بوضع s=1 و r=0 في الصيغة (29) نحصل على النوع الأول من العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWM1) $(\alpha_k)$،وتكون وفق الصيغة الآتية :

$$\alpha_k = \mu_{1,0,k} = \int_0^1 [t(F)](1-F)^k dF \qquad \ldots(30)$$

ثانيا:بوضع s=1 و k=0 في الصيغة (29) نحصل على النوع الثاني من العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWM2) وهي الصيغة المقترح استخدامها في ايجاد تقدير معلمتي توزيع القوى،وتكون وفق الصيغة الآتية:

$$B_r = \mu_{1,r,0} = \int_0^1 [t(F)]F^r dF \qquad \ldots(31)$$

ولاية مجموعة من المشاهدات المرتبة ترتيبا تصاعديا $(t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n)$يمكن تقدير تكامل العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول ( IPWM1 ) لـ $(\alpha_k)$ ويرمز لها بـ $(a_k)$وتكون وفق الصيغة الآتية :

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [\ (1 - P_{nex,i})^k\ t_i\ ] \qquad ...(32)$$

إما تقدير تكامل العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني (IPWM2) $(B_r)$ وهي الصيغة المقترح استخدامها في ايجاد تقدير معلمتي توزيع القوى ويرمز لها بـ $(b_r)$ وتكون وفق الصيغة الآتية :

$$b_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [\ (P^s_{nex,i})\, t_i\ ] \qquad ...(33)$$

وان k و r تكون إعداد صحيحة وموجبة،إي تأخذ القيم r =0,1,2, …, (n-1) و k .إن $t_i$ تمثل المشاهدة رقم (i) المرتبة ترتيبا تصاعديا بين مشاهدات العينة بحجم (n).وان $P_{nex,i}$ تمثل احتمال عدم تجاوز( non-exceedance) الحدث رقم (i) الذي يمكن تقديره بأسلوب موقع الرسم (plotting position) أو بدونه.وقد استعملت عدة صيغ تقريبية لـ $P_{nex,i}$ للحصول على العزوم الاحتمالية الموزونة نذكر منها المستخدمة في هذا البحث هي :

استعمل Landweher (1979) [17] الصيغة غير المتحيزة لـ $P_{nex,i}$ (U-IPWM) وفق الصيغة الآتية:

$$P^j_{nex,i} = \frac{(i-1)!\ (n-j-1)!}{(n-1)!\ (i-j-1)!} \qquad , j = 0,1,2,3,...,(n-1) \qquad ...(34)$$

واستعمل Hosking [1] و Landweher [17] الصيغة المتحيزة لـ $P_{nex,i}$ (B-IPWM) وفق الصيغة الآتية :

$$P^j_{nex,i} = \left(\frac{i-0.35}{n}\right)^j \qquad , j = 0,1,2,3,...,(n-1) \qquad ...(35)$$

وبذلك فان صيغ اشتقاق تقدير توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ ستكون على نوعين كالأتي:

A: اشتقاق تقدير توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ باستخدام النوع الأول من العزوم الاحتمالية الموزونة (IPWM1) المبينة في الصيغة (30) وفق الخطوات الآتية:

1. باستخدام دالة cdf لتوزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ وفق الصيغة (2)
2. باستخدام معكوس دالة cdf للتوزيع المبين بالصيغة (22) وهي $t(F) = \beta(F)^{1/\gamma}$ .
3. بتعويض الصيغة (22) بالصيغة (30) نحصل على $(\alpha_k)$ وكما مبين أدناه.

$$\alpha_k = \mu_{1,0,k} = \int_0^1 [\,t(F)\,](1-F)^k\,dF = \int_0^1 \beta(F)^{1/\gamma}\,(1-F)^k\,dF = \beta\,\mathrm{Beta}(\frac{1}{\gamma}+1, k+1)$$

$$\alpha_k = \beta\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})\;\Gamma(k+1)}{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma}+k)} \qquad \ldots(36)$$

4. ايجاد $\alpha_0$ و $\alpha_1$ وذلك بالتعويض عن k=0 ومرة أخرى بـ k=1 بالصيغة (36) وكما مبين على التوالي.

$$\alpha_0 = \beta\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})\;\Gamma(1)}{\Gamma(2+\frac{1}{\gamma})} \quad , \quad k=0$$

ولأنه $\Gamma(1)=1$ و $\Gamma(2+\frac{1}{\gamma}) = (1+\frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})$ فان $\alpha_0$ ستكون مساوية لـ

$$\alpha_0 = \beta\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{(1+\frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})} = \beta\frac{1}{(1+\frac{1}{\gamma})} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma+1)} \qquad \ldots(37)$$

إما $\alpha_1$ فستكون مساوية لـ

$$\alpha_1 = \beta\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})\;\Gamma(2)}{\Gamma(3+\frac{1}{\gamma})} \quad , \quad k=1$$

ولأنه $\Gamma(2)=1$ و $\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})$ وبتبسيط الصيغة المتقدم ذكرها نجد $\Gamma(3+\frac{1}{\gamma}) = (2+\frac{1}{\gamma})(1+\frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})$ بأن $\alpha_1$ ستكون

$$\alpha_1 = \beta\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{(2+\frac{1}{\gamma})(1+\frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})} = \beta\frac{1}{(2+\frac{1}{\gamma})(1+\frac{1}{\gamma})}$$

وعليه فان $\alpha_1$ ستكون مساوية لـ

$$\alpha_1 = (\frac{\beta\gamma}{\gamma+1})\,(\frac{\gamma}{2\gamma+1}) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_0(\frac{\gamma}{2\gamma+1}) \qquad \ldots(38)$$

إما تقديرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الأول للعينة $(a_k)$، سيتم ايجاد $a_0$ و $a_1$ وذلك بالتعويض عن k=0 ومرة أخرى بـ k=1 في الصيغة ( 32 ) وكما مبين على التوالي .

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(1-P_{nex,i})^0 t_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \bar{t} \qquad \ldots(39)$$

$$a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [(1 - P_{nex,i})^1 t_i] \quad \dots (40)$$

و في حالة التقدير غير المتحيز الصيغة ( 34 ) فان $P_{nex,i}$ تكون مساوية لـ

$$P_{nex,i} = \frac{(i-1)}{(n-1)} \quad , \quad j=1 \quad \dots (41)$$

إما في حالة التقدير المتحيز الصيغة (35) فستكون $P_{nex,i}$ مساوية لـ

$$P_{nex,i} = \left(\frac{i-0.35}{n}\right) \quad , \quad j=1 \quad \dots (42)$$

5. ولاشتقاق صيغ تقدير توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ باستخدام (IPWM1) نتبع مايلي:

- نقوم بمساواة الصيغة (37) بالصيغة (39) والتبسيط نحصل على صيغة تقدير المعلمة $\beta$ وكما مبين أدناه

$$a_0 = \hat{\beta}\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = a_0\left(\frac{\hat{\gamma}+1}{\hat{\gamma}}\right) \quad \dots (43)$$

- إما صيغة تقدير المعلمة $\gamma$ فيتم الحصول عليه بمساواة الصيغة (38) بالصيغة (40) والتبسيط نحصل على $\hat{\gamma}$ وكما مبين أدناه.

$$a_1 = \frac{\hat{\beta}\,\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+1}\left(\frac{\hat{\gamma}}{2\hat{\gamma}+1}\right) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_0\left(\frac{\hat{\gamma}}{2\hat{\gamma}+1}\right) \quad \Rightarrow a_1(2\hat{\gamma}+1) = a_0\hat{\gamma}$$

$$\Rightarrow 2\hat{\gamma}a_1 + a_1 = a_0\hat{\gamma} \Rightarrow \quad a_1 = a_0\hat{\gamma} - 2\hat{\gamma}a_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma} = \frac{a_1}{a_0 - 2a_1} \quad \dots (44)$$

وبتعويض قيمة $\hat{\gamma}$ الصيغة (44) بالصيغة (43) نحصل على قيمة $\hat{\beta}$.

B: اشتقاق تقدير توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ باستخدام النوع الثاني من العزوم الاحتمالية الموزونةالمقترح استخدامها ((IPWM2(pro.)المبينة في الصيغة (31) وفق الخطوات الآتية:

1. باستخدام دالة cdf لتوزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$وفق الصيغة (2)
2. باستخدام معكوس دالة cdf لتوزيع القوى المبينة بالصيغة (22) وهي $t(F) = \beta(F)^{1/\gamma}$.
3. بتعويض الصيغة (22) بالصيغة (31) يتم ايجاد $B_r$ المبينة بالصيغة (23) وكما مبين أدناه.

$$B_r = \int_0^1 t(F)\, F^r dF = \int_0^1 \beta(F)^{1/\gamma}\, F^r dF = \beta \int_0^1 F^{\frac{1}{\gamma}+r} dF$$

$$\Rightarrow B_r = \beta \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}+r\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{\gamma}+r\right)} \quad , \quad r = 0,1$$

4. ايجاد $B_0$و $B_1$ من الصيغة (23) وكما مبين أدناه

- بوضع r =0 بالصيغة المعتمدة لحساب $B_r$ فان $B_0$ ستكون وفق الصيغة (24).

$$B_0 = \frac{\beta\ \gamma}{(\gamma+1)}$$

- بوضع r =1 بالصيغة المعتمدة لحساب $B_r$ فان $B_1$ ستكون وفق الصيغة (25).

$$B_1 = \beta\ \frac{\gamma}{(2\gamma+1)}$$

إما تقديرات العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني للعينة $(b_r)$،فسيتم ايجاد $b_0$و $b_1$ وذلك بالتعويض عن r=0 و r=1 في الصيغة ( 33 ) وكما مبين على التوالي .

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [(P_{nex,i})^0 t_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \bar{t} \quad \dots (45)$$

$$b_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [(P_{nex,i})^1 t_i] \quad \dots (46)$$

وان $P_{nex,i}$ في حالة التقدير غير المتحيز ستكون وفقا للصيغة (41)،إما في حالة التقدير المتحيز فستكون وفقا للصيغة (42).

5. ولاشتقاق صيغ تقدير توزيع دالة القوى بالمعلمتين $(\beta, \gamma)$ باستخدام ((IPWM2(pro.) نتبع مايلي:

- نقوم بمساواة الصيغة (24) بالصيغة (45) والتبسيط نحصل على صيغة تقديرالمعلمة $\beta$ وكما مبين أدناه .

$$b_0 = \hat{\beta}\ (\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+1}) \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = b_0\ (\frac{\hat{\gamma}+1}{\hat{\gamma}}) \quad \dots (47)$$

- إما صيغة تقدير المعلمة $\gamma$ فيتم الحصول عليه بمساواة الصيغة (23) بالصيغة (46) والتبسيط نحصل على $\hat{\gamma}$ وكما مبين أدناه .

$$b_1 = \hat{\beta}\ (\frac{\hat{\gamma}}{2\hat{\gamma}+1}) \quad \dots (48)$$

وبتعويض عن $\hat{\beta}$المبينة بالصيغة (47) في الصيغة (48) والتبسيط نحصل على $\hat{\gamma}$ وكما مبين أدناه

$$b_1 = b_0 \left(\frac{\hat{\gamma}+1}{\hat{\gamma}}\right)\left(\frac{\hat{\gamma}}{2\hat{\gamma}+1}\right) \Rightarrow b_1(2\hat{\gamma}+1) = b_0(\hat{\gamma}+1) \Rightarrow 2\hat{\gamma}b_1 + b_1 = b_0\hat{\gamma} + b_0$$

$$\hat{\gamma}(2b_1 - b_0) = b_0 - b_1 \Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{b_0 - b_1}{2b_1 - b_0} \quad ...(49)$$

من خلال تعويض قيمة $\hat{\gamma}$ المبينة بالصيغة (49) بالصيغة (47) نحصل على قيمة $\hat{\beta}$.

**4. <u>الجانب التجريبي</u>**

تم استخدام المحاكاة لغرض الحصول على تقديرات معلمتي توزيع دالة القوى **(power $(\beta,\gamma)$)** ووفقا لكل الطرائق المتقدم ذكرها في المبحث (3)، تم بناء التجارب وفق الفروض والمواصفات التالية :

1. تم استخدام إحجام العينات n= 15, 25, 50, 100,150,250
2. تم توليد بيانات لتوزيع دالة القوى وفق الصيغة الآتية:

$$t_i = \beta(u_i)^{1/\gamma} \quad ...(50)$$

حيث إن $u_i$ متغير عشوائي من التوزيع المنتظم القياسي، إي $\forall i = 1,2,...,n$ $u_i \sim U(0,1)$.

وبالاعتماد على قيم معلمتي $(\beta,\gamma)$ المفترضة في البحث كما مبينة أدناه:

| | |
|---|---|
| Case -1 with $(\beta=2,\gamma=3)$ | Case -11with $(\beta=6,\gamma=7)$ |
| Case -2 with $(\beta=2,\gamma=5)$ | Case -12 with $(\beta=6,\gamma=9)$ |
| Case -3 with $(\beta=2,\gamma=7)$ | Case -13 with $(\beta=8,\gamma=3)$ |
| Case -4 with $(\beta=2,\gamma=9)$ | Case -14with $(\beta=8,\gamma=5)$ |
| Case-5 with $(\beta=4,\gamma=3)$ | Case -15with $(\beta=8,\gamma=7)$ |
| Case -6 with $(\beta=4,\gamma=5)$ | Case -16with $(\beta=8,\gamma=9)$ |
| Case -7 with $(\beta=4,\gamma=7)$ | Case -17 with $(\beta=\gamma=2)$ |
| Case -8 with $(\beta=4,\gamma=9)$ | Case -18 with $(\beta=\gamma=5)$ |
| Case -9 with $(\beta=6,\gamma=3)$ | Case -19 with $(\beta=\gamma=6)$ |
| Case -10with $(\beta=6,\gamma=5)$ | Case -20 with $(\beta=\gamma=9)$ |

3. ثم يتم إجراء التجارب المختلفة وفقا لجميع التوليفات الممكنة للفروض المتقدم ذكرها أعلاه من خلال تكرارهذا التوليد لتوزيع دالة القوى لـ 1000 مرة لكل تجربة ولكل حجم عينة (n).

4. ومن ثم يتم استخدام صيغ التقدير (9) و(14) بطريقة العزوم ، والصيغ (27) و(28) بطريقة العزوم−L والصيغ (43) و(44) بطريقة العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الاول المتحيزة

وغير المتحيزة ،والصيغ (47) و(49) بطريقة العزوم الاحتمالية الموزونة من النوع الثاني المتحيزة وغير المتحيزة.

5.استخدام المعايير التالية لمعرفة أفضلية التقديرات .

متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error (MSE)

$$\mathbf{MSE} = \sum_{r=1}^{1000} (\theta_i - \hat{\theta}_i(r))^2 / 1000 \qquad \ldots(51)$$

إذ إن $\theta_i$ قد تكون إحدى معلمتي التوزيع $(\beta, \gamma)$.

الانحراف الكلي Total Derivation (TD)

$$\mathbf{TD} = \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \left[ \left| \frac{\hat{\gamma}(r) - \gamma}{\gamma} \right| + \left| \frac{\hat{\beta}(r) - \beta}{\beta} \right| \right] \qquad \ldots(52)$$

وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في الجداول (1,2,3,4,5) .

4.1 استعراض النتائج التجريبية

في هذا المبحث سنعرض النتائج التي تم الحصول عليها وتحليها ووفق معايير المفاضلة المتقدم ذكرها في الصيغتين (51)و(52) للتحري عن جودت تقديرات توزيع دالة القوى$(\beta, \gamma)$،ووفقا لكل الطرائق المتقدم ذكرها في المبحث (3)،انظرالجداول (5-1).وكما مبين في الجداول التي تبين القيم المقدرة لمعلمة الشكل $(\gamma)$ومعلمة القياس $(\beta)$ لتوزيع دالة القوى مع متوسط مربعات الخطأ والانحراف الكلي لكلا المعلمتين المقدرة$(\beta, \gamma)$،بكل طرائق التقديرالمستخدمة متضمنة طريقة العزوم وطريقة العزوم−L وطريقتي العزوم الاحتمالية الموزونة للنوع الأول والثاني(المقترح استخدامها) الغيرمتحيزة والمتحيزة لكل إحجام العينات ولكل الحالات المفترضة في البحث.

**جدول( 1 )**

**يبين القيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيعالقوى ( Power Dist$^{n}$. ) مع متوسط مربعات الخطأ لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي،حين تكون الحالات المفترضة بالمعلمتين $(\beta = 2, \gamma = 3,5,7,9)$ ، وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM2) ولكل إحجام العينات المفترضة في البحث.**

| n | method | Case -1 with $(\beta = 2, \gamma = 3)$ | | | | | Case -2 with $(\beta = 2, \gamma = 5)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 1.9734 | 3.3929 | 0.0110 | 1.4046 | 0.3230 | 1.9826 | 5.8290 | 0.0047 | 5.5079 | 0.3365 |
| | L-MOM | 2.1379 | 2.4003 | 0.0260 | 0.5948 | 0.2942 | 2.1830 | 3.2992 | 0.0361 | 3.1773 | 0.4322 |
| | U-IPWM1 | 2.0052 | 3.1531 | 0.0084 | 0.9896 | 3.1895 | 2.0046 | 5.3716 | 0.0031 | 3.6852 | 5.3935 |
| | B-IPWM1 | 2.0476 | 2.8567 | 0.0104 | 0.5950 | 2.8979 | 2.0614 | 4.4524 | 0.0067 | 1.6376 | 4.4875 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0052 | 3.1531 | 0.0084 | 0.9896 | 0.2826 | 2.0046 | 5.3716 | 0.0031 | 3.6852 | 0.2803 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0476 | 2.8567 | 0.0104 | 0.5950 | 0.2480 | 2.0614 | 4.4524 | 0.0067 | 1.6376 | 0.2439 |
| 25 | MOM | 1.9883 | 3.2439 | 0.0058 | 0.6840 | 0.2358 | 1.9886 | 5.4957 | 0.0026 | 2.1814 | 0.2374 |
| | L-MOM | 2.0719 | 2.7106 | 0.0089 | 0.3292 | 0.1993 | 2.0978 | 3.9616 | 0.0109 | 1.4414 | 0.2632 |
| | U-IPWM1 | 2.0057 | 3.1168 | 0.0043 | 0.5318 | 3.1427 | 2.0021 | 5.2255 | 0.0016 | 1.5006 | 5.2416 |
| | B-IPWM1 | 2.0314 | 2.9448 | 0.0052 | 0.3908 | 2.9739 | 2.0361 | 4.6925 | 0.0029 | 0.9803 | 4.7147 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0057 | 3.1168 | 0.0043 | 0.5318 | 0.2113 | 2.0021 | 5.2255 | 0.0016 | 1.5006 | 0.2024 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0314 | 2.9448 | 0.0052 | 0.3908 | 0.1944 | 2.0361 | 4.6925 | 0.0029 | 0.9803 | 0.1833 |
| 50 | MOM | 1.9914 | 3.1173 | 0.0027 | 0.2713 | 0.1545 | 1.9944 | 5.2285 | 0.0014 | 0.9288 | 0.1624 |
| | L-MOM | 2.0274 | 2.8882 | 0.0025 | 0.1788 | 0.1364 | 2.0413 | 4.5213 | 0.0024 | 0.6162 | 0.1528 |
| | U-IPWM1 | 2.0009 | 3.0524 | 0.0019 | 0.2299 | 3.0696 | 2.0006 | 5.1103 | 0.0008 | 0.7334 | 5.1219 |
| | B-IPWM1 | 2.0137 | 2.9713 | 0.0021 | 0.1991 | 2.9893 | 2.0175 | 4.8495 | 0.0011 | 0.5922 | 4.8632 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0009 | 3.0524 | 0.0019 | 0.2299 | 0.1433 | 2.0006 | 5.1103 | 0.0008 | 0.7334 | 0.1455 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0137 | 2.9713 | 0.0021 | 0.1991 | 0.1378 | 2.0175 | 4.8495 | 0.0011 | 0.5922 | 0.1381 |
| 100 | MOM | 1.9972 | 3.0567 | 0.0013 | 0.1347 | 0.1089 | 1.9984 | 5.0957 | 0.0007 | 0.3829 | 0.1067 |
| | L-MOM | 2.0120 | 2.9630 | 0.0010 | 0.1083 | 0.0999 | 2.0191 | 4.7768 | 0.0007 | 0.2780 | 0.0965 |
| | U-IPWM1 | 2.0015 | 3.0277 | 0.0009 | 0.1222 | 3.0399 | 2.0014 | 5.0395 | 0.0004 | 0.3073 | 5.0476 |
| | B-IPWM1 | 2.0080 | 2.9880 | 0.0010 | 0.1137 | 3.0006 | 2.0098 | 4.9120 | 0.0005 | 0.2803 | 4.9211 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0015 | 3.0277 | 0.0009 | 0.1222 | 0.1027 | 2.0014 | 5.0395 | 0.0004 | 0.3073 | 0.0949 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0080 | 2.9880 | 0.0010 | 0.1137 | 0.1009 | 2.0098 | 4.9120 | 0.0005 | 0.2803 | 0.0930 |
| 150 | MOM | 1.9977 | 3.0428 | 0.0009 | 0.0835 | 0.0874 | 1.9983 | 5.0507 | 0.0005 | 0.2618 | 0.0876 |
| | L-MOM | 2.0066 | 2.9871 | 0.0007 | 0.0714 | 0.0811 | 2.0112 | 4.8511 | 0.0004 | 0.2044 | 0.0815 |
| | U-IPWM1 | 2.0005 | 3.0246 | 0.0006 | 0.0771 | 3.0346 | 2.0003 | 5.0132 | 0.0003 | 0.2201 | 5.0200 |
| | B-IPWM1 | 2.0048 | 2.9983 | 0.0007 | 0.0732 | 3.0086 | 2.0059 | 4.9288 | 0.0003 | 0.2088 | 4.9360 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0005 | 3.0246 | 0.0006 | 0.0771 | 0.0827 | 2.0003 | 5.0132 | 0.0003 | 0.2201 | 0.0797 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0048 | 2.9983 | 0.0007 | 0.0732 | 0.0817 | 2.0059 | 4.9288 | 0.0003 | 0.2088 | 0.0798 |
| 250 | MOM | 1.9988 | 3.0305 | 0.0005 | 0.0472 | 0.0671 | 1.9993 | 5.0423 | 0.0003 | 0.1397 | 0.0654 |
| | L-MOM | 2.0037 | 2.9996 | 0.0004 | 0.0415 | 0.0622 | 2.0064 | 4.9323 | 0.0002 | 0.1140 | 0.0591 |
| | U-IPWM1 | 2.0006 | 3.0188 | 0.0004 | 0.0435 | 3.0264 | 2.0005 | 5.0207 | 0.0001 | 0.1210 | 5.0256 |
| | B-IPWM1 | 2.0032 | 3.0031 | 0.0004 | 0.0420 | 3.0108 | 2.0039 | 4.9699 | 0.0002 | 0.1162 | 4.9750 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0006 | 3.0188 | 0.0004 | 0.0435 | 0.0633 | 2.0005 | 5.0207 | 0.0001 | 0.1210 | 0.0595 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0032 | 3.0031 | 0.0004 | 0.0420 | 0.0626 | 2.0039 | 4.9699 | 0.0002 | 0.1162 | 0.0590 |

تابع لجدول( 1 )

| n | method | Case -3 with ($\beta = 2, \gamma = 7$) | | | | | Case -4 with ($\beta = 2, \gamma = 9$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 1.9834 | 8.1490 | 0.0027 | 8.6641 | 0.3149 | 1.9864 | 10.7586 | 0.0020 | 17.4412 | 0.3534 |
| | L-MOM | 2.2052 | 3.8857 | 0.0434 | 9.9507 | 0.5475 | 2.2192 | 4.3449 | 0.0490 | 21.9146 | 0.6268 |
| | U-IPWM1 | 2.0016 | 7.4604 | 0.0017 | 5.3694 | 7.4766 | 2.0003 | 9.8189 | 0.0012 | 10.6406 | 9.8321 |
| | B-IPWM1 | 2.0649 | 5.7681 | 0.0059 | 3.1247 | 5.8018 | 2.0676 | 7.0236 | 0.0057 | 6.2385 | 7.0578 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0016 | 7.4604 | 0.0017 | 5.3694 | 0.2550 | 2.0003 | 9.8189 | 0.0012 | 10.6406 | 0.2807 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0649 | 5.7681 | 0.0059 | 3.1247 | 0.2515 | 2.0676 | 7.0236 | 0.0057 | 6.2385 | 0.2773 |
| 25 | MOM | 1.9896 | 7.6955 | 0.0018 | 4.7401 | 0.2500 | 1.9927 | 9.8320 | 0.0012 | 6.6895 | 0.2323 |
| | L-MOM | 2.1103 | 4.9067 | 0.0130 | 4.8794 | 0.3543 | 2.1225 | 5.6296 | 0.0155 | 11.8118 | 0.4358 |
| | U-IPWM1 | 1.9999 | 7.3015 | 0.0011 | 3.3087 | 7.3144 | 2.0014 | 9.3045 | 0.0006 | 4.5013 | 9.3144 |
| | B-IPWM1 | 2.0377 | 6.2524 | 0.0024 | 2.1906 | 6.2732 | 2.0414 | 7.6443 | 0.0023 | 3.7534 | 7.6656 |
| | U-IPWM2(pro.) | 1.9999 | 7.3015 | 0.0011 | 3.3087 | 0.2126 | 2.0014 | 9.3045 | 0.0006 | 4.5013 | 0.1934 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0377 | 6.2524 | 0.0024 | 2.1906 | 0.1990 | 2.0414 | 7.6443 | 0.0023 | 3.7534 | 0.2034 |
| 50 | MOM | 1.9963 | 7.3203 | 0.0008 | 1.8422 | 0.1580 | 1.9948 | 9.5996 | 0.0006 | 3.6107 | 0.1682 |
| | L-MOM | 2.0506 | 5.9051 | 0.0029 | 1.7289 | 0.1905 | 2.0548 | 7.1936 | 0.0032 | 3.9956 | 0.2306 |
| | U-IPWM1 | 2.0012 | 7.1381 | 0.0005 | 1.3773 | 7.1466 | 1.9993 | 9.3276 | 0.0003 | 2.6032 | 9.3344 |
| | B-IPWM1 | 2.0200 | 6.6145 | 0.0009 | 1.1220 | 6.6266 | 2.0193 | 8.4291 | 0.0007 | 1.9398 | 8.4398 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0012 | 7.1381 | 0.0005 | 1.3773 | 0.1373 | 1.9993 | 9.3276 | 0.0003 | 2.6032 | 0.1441 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0200 | 6.6145 | 0.0009 | 1.1220 | 0.1343 | 2.0193 | 8.4291 | 0.0007 | 1.9398 | 0.1366 |
| 100 | MOM | 1.9978 | 7.1634 | 0.0004 | 0.7712 | 0.1052 | 1.9981 | 9.1488 | 0.0003 | 1.3732 | 0.1092 |
| | L-MOM | 2.0230 | 6.4708 | 0.0007 | 0.6706 | 0.1092 | 2.0257 | 7.9861 | 0.0008 | 1.6114 | 0.1340 |
| | U-IPWM1 | 2.0006 | 7.0656 | 0.0002 | 0.6051 | 7.0714 | 2.0004 | 9.0197 | 0.0001 | 1.0530 | 9.0244 |
| | B-IPWM1 | 2.0100 | 6.8038 | 0.0003 | 0.5492 | 6.8109 | 2.0103 | 8.5859 | 0.0002 | 1.0267 | 8.5923 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0006 | 7.0656 | 0.0002 | 0.6051 | 0.0928 | 2.0004 | 9.0197 | 0.0001 | 1.0530 | 0.0949 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0100 | 6.8038 | 0.0003 | 0.5492 | 0.0919 | 2.0103 | 8.5859 | 0.0002 | 1.0267 | 0.0979 |
| 150 | MOM | 1.9978 | 7.1486 | 0.0003 | 0.5177 | 0.0882 | 1.9980 | 9.1585 | 0.0002 | 0.8512 | 0.0868 |
| | L-MOM | 2.0141 | 6.6891 | 0.0003 | 0.4047 | 0.0823 | 2.0160 | 8.3678 | 0.0003 | 0.8434 | 0.0933 |
| | U-IPWM1 | 1.9999 | 7.0772 | 0.0002 | 0.4114 | 7.0822 | 1.9997 | 9.0615 | 0.0001 | 0.6562 | 9.0653 |
| | B-IPWM1 | 2.0062 | 6.9007 | 0.0002 | 0.3738 | 6.9063 | 2.0063 | 8.7664 | 0.0001 | 0.6219 | 8.7710 |
| | U-IPWM2(pro.) | 1.9999 | 7.0772 | 0.0002 | 0.4114 | 0.0780 | 1.9997 | 9.0615 | 0.0001 | 0.6562 | 0.0750 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0062 | 6.9007 | 0.0002 | 0.3738 | 0.0764 | 2.0063 | 8.7664 | 0.0001 | 0.6219 | 0.0753 |
| 250 | MOM | 1.9990 | 7.0630 | 0.0002 | 0.2878 | 0.0657 | 1.9990 | 9.0967 | 0.0001 | 0.5157 | 0.0678 |
| | L-MOM | 2.0079 | 6.8083 | 0.0001 | 0.2301 | 0.0604 | 2.0091 | 8.6438 | 0.0001 | 0.4338 | 0.0646 |
| | U-IPWM1 | 2.0000 | 7.0264 | 0.0001 | 0.2287 | 7.0302 | 1.9999 | 9.0445 | 0.0001 | 0.3899 | 9.0474 |
| | B-IPWM1 | 2.0038 | 6.9215 | 0.0001 | 0.2199 | 6.9256 | 2.0039 | 8.8665 | 0.0001 | 0.3746 | 8.8698 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0000 | 7.0264 | 0.0001 | 0.2287 | 0.0575 | 1.9999 | 9.0445 | 0.0001 | 0.3899 | 0.0584 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0038 | 6.9215 | 0.0001 | 0.2199 | 0.0576 | 2.0039 | 8.8665 | 0.0001 | 0.3746 | 0.0582 |

نلاحظ بشكل عام من الجدول(1): للحالة-1وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)MSE، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1و U-IPWM2(Pro.)الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيم n عدا n=250فقد أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.إما عندما تكون n=250 ،قد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعياروهي **MSE($\hat{\beta}$) = 0.0004**مقارنة بطريقة MOM.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\gamma}$)MSE تعد طريقة L-MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيم n.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيارالانحراف الكلي (TD)،تعد طريقة B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستعملة لـ **($n \le 25$)**في حين تكون طريقةL-MOM الافضل مقارنة ببقية طرائق البحث لبقية قيم **($n \ge 50$)**.للحالة-2وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)MSE، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيمn عدا n=150، فقد أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.إما عندما يكون حجم العينة n=150،فقد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعياروهي **MSE($\hat{\beta}$) = 0.0003**مقارنة بطريقتيMOMو L-MOM.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\gamma}$)MSE، تعد طريقتي التقدير B-IPWM1وB-IPWM2(Pro.)الافضل مقارنة ببقية الطرائق لـ **($n \le 50$)**،في حين تعد طريقة L-MOM الافضل مقارنة ببقية طرائق التقدير لـ **($n \ge 100$)**.وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيارTDتعد طريقة B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n.للحالة- 3 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)MSE، تعد طريقتي U-IPWM1و U-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيم nعدا n=150,250،فقد أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.إما عندما تكون n=150، فقد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعيار وهي **MSE($\hat{\beta}$) = 0.0002** مقارنة بطريقة MOMو L-MOM.وكذلك عندما تكون n=250،فقد أعطت كل الطرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعيار وهي **MSE($\hat{\beta}$) = 0.0001**مقارنة بطريقة MOM.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\gamma}$)MSE، تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n.وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيارTD، تعد طريقة B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n عدا n=250،قد أعطت طريقة U-IPWM2(Pro.) اقل قيمة لهذا المعيار TD=0.0575 مقارنة ببقية الطرائق.للحالة-4وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)MSE، تعد طريقتي U-IPWM1و U-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيمn عدا n=150,250، فقد أعطت نفس القيمة لهذا

المعيار.إما عندما يكون حجم العينة n=150،فقد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعياروهي **MSE($\hat{\beta}$) = 0.0001** مقارنة بطريقةMOMو L-MOM.وكذلك عندما تكون n=250،فقد أعطت كل الطرائق التقدير نفس القيمة لهذا المعياروهي **MSE($\hat{\beta}$) = 0.0001** .وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار **MSE($\hat{\gamma}$)**،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1وB-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n.وعموما فقد اعطت الطريقتين المتقدم ذكرهما نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لـTDتعد طريقة B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لقيم n عدا n=15,50,250،في حين تعد طريقةU-IPWM2(Pro.)الافضل مقارنة ببقية الطرائق لبقية قيم n.

**جدول( 2 )**

**يبين القيم المقدرة لمعلمتي الشكل والقياس للتوزيع القوى ( Power Dist$^{n}$. ) مع متوسط مربعات الخطأ لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي،حين تكون الحالات المفترضة بالمعلمتين $(\beta = 4, \gamma = 3,5,7,9)$ ،وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM2) ولكل إحجام العينات المفترضة في البحث.**

| n | method | Case -5 with $(\beta = 4, \gamma = 3)$ | | | | | Case -6 with $(\beta = 4, \gamma = 5)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 3.9622 | 3.4452 | 0.0371 | 1.5221 | 0.3275 | 3.9567 | 5.8815 | 0.0194 | 5.0587 | 0.3429 |
| | L-MOM | 4.2825 | 2.4518 | 0.1039 | 0.5576 | 0.2854 | 4.3630 | 3.3029 | 0.1420 | 3.1581 | 0.4302 |
| | U-IPWM1 | 4.0197 | 3.2226 | 0.0289 | 1.0854 | 3.2563 | 4.0027 | 5.3965 | 0.0127 | 3.2016 | 5.4187 |
| | B-IPWM1 | 4.1061 | 2.9104 | 0.0385 | 0.6168 | 2.9504 | 4.1165 | 4.4765 | 0.0256 | 1.5345 | 4.5101 |
| | U-PWM2(pro.) | 4.0197 | 3.2226 | 0.0289 | 1.0854 | 0.2884 | 4.0027 | 5.3965 | 0.0127 | 3.2016 | 0.2803 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.1061 | 2.9104 | 0.0385 | 0.6168 | 0.2476 | 4.1165 | 4.4765 | 0.0256 | 1.5345 | 0.2383 |
| 25 | MOM | 3.9711 | 3.2207 | 0.0240 | 0.7001 | 0.2335 | 3.9747 | 5.4911 | 0.0106 | 2.1881 | 0.2384 |
| | L-MOM | 4.1395 | 2.6897 | 0.0344 | 0.3500 | 0.2049 | 4.1905 | 3.9764 | 0.0423 | 1.4398 | 0.2608 |
| | U-IPWM1 | 4.0073 | 3.0912 | 0.0174 | 0.5541 | 3.1170 | 4.0007 | 5.2402 | 0.0069 | 1.6072 | 5.2567 |
| | B-IPWM1 | 4.0584 | 2.9219 | 0.0204 | 0.4116 | 2.9503 | 4.0688 | 4.7027 | 0.0115 | 1.0252 | 4.7248 |
| | U-PWM2(pro.) | 4.0073 | 3.0912 | 0.0174 | 0.5541 | 0.2122 | 4.0007 | 5.2402 | 0.0069 | 1.6072 | 0.2078 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0584 | 2.9219 | 0.0204 | 0.4116 | 0.1971 | 4.0688 | 4.7027 | 0.0115 | 1.0252 | 0.1867 |
| 50 | MOM | 3.9909 | 3.1000 | 0.0106 | 0.2986 | 0.1583 | 3.9877 | 5.2600 | 0.0058 | 0.8836 | 0.1610 |
| | L-MOM | 4.0617 | 2.8752 | 0.0106 | 0.2007 | 0.1425 | 4.0833 | 4.5338 | 0.0098 | 0.5677 | 0.1466 |
| | U-IPWM1 | 4.0088 | 3.0382 | 0.0076 | 0.2554 | 3.0557 | 4.0007 | 5.1342 | 0.0033 | 0.6811 | 5.1459 |
| | B-IPWM1 | 4.0344 | 2.9577 | 0.0086 | 0.2228 | 2.9764 | 4.0347 | 4.8714 | 0.0045 | 0.5395 | 4.8850 |
| | U-PWM2(pro.) | 4.0088 | 3.0382 | 0.0076 | 0.2554 | 0.1472 | 4.0007 | 5.1342 | 0.0033 | 0.6811 | 0.1395 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0344 | 2.9577 | 0.0086 | 0.2228 | 0.1435 | 4.0347 | 4.8714 | 0.0045 | 0.5395 | 0.1312 |
| 100 | MOM | 3.9931 | 3.0464 | 0.0058 | 0.1266 | 0.1083 | 3.9933 | 5.1220 | 0.0027 | 0.4115 | 0.1107 |
| | L-MOM | 4.0223 | 2.9547 | 0.0045 | 0.1044 | 0.0999 | 4.0359 | 4.7932 | 0.0028 | 0.2962 | 0.0992 |
| | U-IPWM1 | 4.0017 | 3.0178 | 0.0042 | 0.1156 | 3.0306 | 4.0003 | 5.0592 | 0.0016 | 0.3408 | 5.0671 |
| | B-IPWM1 | 4.0145 | 2.9785 | 0.0044 | 0.1084 | 2.9916 | 4.0172 | 4.9304 | 0.0019 | 0.3055 | 4.9392 |
| | U-PWM2(pro.) | 4.0017 | 3.0178 | 0.0042 | 0.1156 | 0.1029 | 4.0003 | 5.0592 | 0.0016 | 0.3408 | 0.0996 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0145 | 2.9785 | 0.0044 | 0.1084 | 0.1009 | 4.0172 | 4.9304 | 0.0019 | 0.3055 | 0.0967 |
| 150 | MOM | 3.9963 | 3.0285 | 0.0038 | 0.0781 | 0.0868 | 3.9951 | 5.0768 | 0.0019 | 0.2297 | 0.0834 |
| | L-MOM | 4.0143 | 2.9723 | 0.0028 | 0.0677 | 0.0807 | 4.0213 | 4.8750 | 0.0015 | 0.1795 | 0.0773 |
| | U-IPWM1 | 4.0021 | 3.0092 | 0.0026 | 0.0721 | 3.0195 | 3.9996 | 5.0379 | 0.0011 | 0.1960 | 5.0445 |
| | B-IPWM1 | 4.0107 | 2.9833 | 0.0027 | 0.0692 | 2.9938 | 4.0108 | 4.9527 | 0.0012 | 0.1825 | 4.9598 |
| | U-PWM2(pro.) | 4.0021 | 3.0092 | 0.0026 | 0.0721 | 0.0823 | 3.9996 | 5.0379 | 0.0011 | 0.1960 | 0.0764 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0107 | 2.9833 | 0.0027 | 0.0692 | 0.0814 | 4.0108 | 4.9527 | 0.0012 | 0.1825 | 0.0757 |
| 250 | MOM | 3.9985 | 3.0134 | 0.0024 | 0.0492 | 0.0688 | 3.9984 | 5.0403 | 0.0011 | 0.1362 | 0.0653 |
| | L-MOM | 4.0082 | 2.9826 | 0.0017 | 0.0432 | 0.0638 | 4.0128 | 4.9292 | 0.0008 | 0.1100 | 0.0588 |
| | U-IPWM1 | 4.0021 | 3.0013 | 0.0017 | 0.0447 | 3.0095 | 4.0009 | 5.0179 | 0.0007 | 0.1166 | 5.0230 |
| | B-IPWM1 | 4.0072 | 2.9858 | 0.0017 | 0.0437 | 2.9942 | 4.0077 | 4.9671 | 0.0007 | 0.1122 | 4.9724 |
| | U-PWM2(pro.) | 4.0021 | 3.0013 | 0.0017 | 0.0447 | 0.0645 | 4.0009 | 5.0179 | 0.0007 | 0.1166 | 0.0595 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0072 | 2.9858 | 0.0017 | 0.0437 | 0.0641 | 4.0077 | 4.9671 | 0.0007 | 0.1122 | 0.0588 |

تابع لجدول( 2 )

| n | method | Case -7 with ($\beta=4,\gamma=7$) | | | | | Case -8 with ($\beta=4,\gamma=9$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 3.9745 | 8.1379 | 0.0118 | 9.8091 | 0.3385 | 3.9719 | 10.7464 | 0.0077 | 17.1790 | 0.3508 |
| | L-MOM | 4.4109 | 3.8869 | 0.1743 | 9.9699 | 0.5474 | 4.4383 | 4.3394 | 0.1960 | 21.9851 | 0.6274 |
| | U-IPWM1 | 4.0075 | 7.4709 | 0.0073 | 6.1501 | 7.4877 | 4.0007 | 9.8083 | 0.0047 | 10.7968 | 9.8215 |
| | B-IPWM1 | 4.1340 | 5.7605 | 0.0248 | 3.3868 | 5.7953 | 4.1352 | 7.0150 | 0.0227 | 6.3380 | 7.0493 |
| | U-IPWM2(pro.) | 4.0075 | 7.4709 | 0.0073 | 6.1501 | 0.2785 | 4.0007 | 9.8083 | 0.0047 | 10.7968 | 0.2837 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.1340 | 5.7605 | 0.0248 | 3.3868 | 0.2624 | 4.1352 | 7.0150 | 0.0227 | 6.3380 | 0.2779 |
| 25 | MOM | 3.9808 | 7.6651 | 0.0071 | 4.1064 | 0.2342 | 3.9832 | 10.0034 | 0.0044 | 8.3477 | 0.2477 |
| | L-MOM | 4.2209 | 4.9183 | 0.0520 | 4.7548 | 0.3526 | 4.2451 | 5.6588 | 0.0621 | 11.6617 | 0.4325 |
| | U-IPWM1 | 3.9999 | 7.2948 | 0.0039 | 2.7967 | 7.3072 | 4.0011 | 9.4499 | 0.0025 | 5.5926 | 9.4599 |
| | B-IPWM1 | 4.0756 | 6.2550 | 0.0096 | 1.9331 | 6.2757 | 4.0813 | 7.7308 | 0.0090 | 3.8372 | 7.7517 |
| | U-IPWM2(pro.) | 3.9999 | 7.2948 | 0.0039 | 2.7967 | 0.1978 | 4.0011 | 9.4499 | 0.0025 | 5.5926 | 0.2075 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0756 | 6.2550 | 0.0096 | 1.9331 | 0.1877 | 4.0813 | 7.7308 | 0.0090 | 3.8372 | 0.2064 |
| 50 | MOM | 3.9906 | 7.3305 | 0.0035 | 1.7606 | 0.1590 | 3.9926 | 9.4818 | 0.0022 | 3.4792 | 0.1671 |
| | L-MOM | 4.1012 | 5.8984 | 0.0119 | 1.7371 | 0.1911 | 4.1110 | 7.1411 | 0.0133 | 4.1797 | 0.2364 |
| | U-IPWM1 | 4.0016 | 7.1355 | 0.0019 | 1.3229 | 7.1441 | 4.0008 | 9.2295 | 0.0011 | 2.5627 | 9.2364 |
| | B-IPWM1 | 4.0392 | 6.6128 | 0.0034 | 1.0850 | 6.6247 | 4.0407 | 8.3491 | 0.0028 | 2.0493 | 8.3603 |
| | U-IPWM2(pro.) | 4.0016 | 7.1355 | 0.0019 | 1.3229 | 0.1373 | 4.0008 | 9.2295 | 0.0011 | 2.5627 | 0.1447 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0392 | 6.6128 | 0.0034 | 1.0850 | 0.1342 | 4.0407 | 8.3491 | 0.0028 | 2.0493 | 0.1421 |
| 100 | MOM | 3.9959 | 7.1551 | 0.0016 | 0.7360 | 0.1045 | 3.9957 | 9.2258 | 0.0012 | 1.4104 | 0.1113 |
| | L-MOM | 4.0464 | 6.4613 | 0.0030 | 0.6627 | 0.1088 | 4.0508 | 8.0463 | 0.0031 | 1.5036 | 0.1295 |
| | U-IPWM1 | 4.0014 | 7.0591 | 0.0009 | 0.5823 | 7.0649 | 4.0000 | 9.0990 | 0.0006 | 1.0765 | 9.1038 |
| | B-IPWM1 | 4.0202 | 6.7979 | 0.0013 | 0.5329 | 6.8051 | 4.0199 | 8.6574 | 0.0010 | 0.9813 | 8.6639 |
| | U-IPWM2(pro.) | 4.0014 | 7.0591 | 0.0009 | 0.5823 | 0.0921 | 4.0000 | 9.0990 | 0.0006 | 1.0765 | 0.0964 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0202 | 6.7979 | 0.0013 | 0.5329 | 0.0922 | 4.0199 | 8.6574 | 0.0010 | 0.9813 | 0.0960 |
| 150 | MOM | 3.9958 | 7.1461 | 0.0011 | 0.5641 | 0.0910 | 3.9962 | 9.1800 | 0.0008 | 0.9657 | 0.0919 |
| | L-MOM | 4.0279 | 6.6896 | 0.0013 | 0.4202 | 0.0832 | 4.0318 | 8.3890 | 0.0014 | 0.8516 | 0.0936 |
| | U-IPWM1 | 3.9998 | 7.0759 | 0.0006 | 0.4367 | 7.0808 | 3.9994 | 9.0857 | 0.0004 | 0.7218 | 9.0896 |
| | B-IPWM1 | 4.0123 | 6.8993 | 0.0007 | 0.3968 | 6.9049 | 4.0127 | 8.7888 | 0.0005 | 0.6656 | 8.7935 |
| | U-IPWM2(pro.) | 3.9998 | 7.0759 | 0.0006 | 0.4367 | 0.0799 | 3.9994 | 9.0857 | 0.0004 | 0.7218 | 0.0797 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0123 | 6.8993 | 0.0007 | 0.3968 | 0.0779 | 4.0127 | 8.7888 | 0.0005 | 0.6656 | 0.0787 |
| 250 | MOM | 3.9973 | 7.0908 | 0.0007 | 0.3147 | 0.0670 | 3.9981 | 9.0630 | 0.0005 | 0.5245 | 0.0685 |
| | L-MOM | 4.0155 | 6.8300 | 0.0006 | 0.2322 | 0.0595 | 4.0182 | 8.6133 | 0.0006 | 0.4813 | 0.0684 |
| | U-IPWM1 | 3.9997 | 7.0484 | 0.0004 | 0.2444 | 7.0521 | 3.9999 | 9.0128 | 0.0002 | 0.4146 | 9.0158 |
| | B-IPWM1 | 4.0072 | 6.9428 | 0.0004 | 0.2300 | 6.9468 | 4.0078 | 8.8360 | 0.0003 | 0.4081 | 8.8394 |
| | U-IPWM2(pro.) | 3.9997 | 7.0484 | 0.0004 | 0.2444 | 0.0587 | 3.9999 | 9.0128 | 0.0002 | 0.4146 | 0.0602 |
| | B-IPWM2(pro.) | 4.0072 | 6.9428 | 0.0004 | 0.2300 | 0.0577 | 4.0078 | 8.8360 | 0.0003 | 0.4081 | 0.0609 |

نلاحظ بشكل عام من الجدول (2):للحالة–5وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$،تعد طريقتي التقدير U-IPWM1و U-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيم عدا n=250، فقد أعطت نفس القيمة لهذا المعيار. إما عندما يكون حجم العينة n=250، فقد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعياروهي $\mathbf{MSE}(\hat{\beta}) = \mathbf{0.0017}$مقارنة بطريقة MOM.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$ تعد طريقة L-MOM الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيم n .وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار الانحراف الكلي (TD)،تعد طريقة ((B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لـ $(\mathbf{n} \le 25)$في حين تكون طريقة L-MOM الافضل مقارنة ببقية طرائق البحث لـ $(\mathbf{n} \ge 50)$. للحالة–6وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$،تعد طريقتي التقدير (U-IPWM1) و((U-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات عدا n=250، فقد أعطت نفس القيمة لهذا المعيار. إما عندما يكون حجم العينة n=250، فقد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعيار وهي $\mathbf{MSE}(\hat{\beta}) = \mathbf{0.0007}$ مقارنة بطريقتي (MOM) و(L-MOM).وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$ ، تعد طريقتي التقدير (B-IPWM1) و ((B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لإحجام العينات الصغيرة $(\mathbf{n} \le 100)$ ،في حين تعد طريقة (L-MOM) الافضل مقارنة ببقية طرائق التقدير لحجوم العينات الكبيرة $(\mathbf{n} \ge 150)$.وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار (TD) تعد طريقة ((B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل قيم nعدا $(\mathbf{n} = 250)$.فقد أعطت طريقتي التقدير (L-MOM) و(B-IPWM2(Pro.)) اقل قيمة لهذا المعيار TD=0.0588 عندما تكون n=250. للحالة–7وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$،تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق ولكل قيم n عدا n=250 ، فقد أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.إما عندما تكونn=250،فقد أعطت كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعياروهي $\mathbf{MSE}(\hat{\beta}) = \mathbf{0.0004}$ مقارنة بطريقتي MOM و L-MOM.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n ، وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD تعد طريقة B-IPWM2(Pro.)الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيمn عدا n=100، فقد أعطت طريقة U-IPWM2(Pro.) اقل قيمة لهذا المعيار TD عندما تكون n=100.للحالة–8وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$،تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.)

الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و-B IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TDتعد طريقة (.B-IPWM2(Pro الافضل مقارنة ببقية الطرائق لكل قيم n عدا n=250،فقد أعطت طريقة (.U-IPWM2(Pro اقل قيمة لهذا المعيار TD=0.0602 عندما تكون n=250.

جدول( 3 ) يبين القيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع القوى ( Power Dist$^{n}$. ) مع متوسط مربعات الخطأ لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي،حيث تكون الحالات المفترضة بالمعلمتين $(\beta = 6, \gamma = 3,5,7,9)$ ،وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة )العينات المفترضة (IPWM2ولكل إحجام في البحث.

| n | method | Case -9 with $(\beta = 6, \gamma = 3)$ | | | | | Case -10 with $(\beta = 6, \gamma = 5)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 5.9244 | 3.4013 | 0.0917 | 1.4373 | 0.3179 | 5.9467 | 5.7825 | 0.0500 | 4.7740 | 0.3366 |
| | L-MOM | 6.4112 | 2.4138 | 0.2273 | 0.5730 | 0.2909 | 6.5447 | 3.2914 | 0.3237 | 3.2020 | 0.4327 |
| | U-IPWM1 | 6.0177 | 3.1637 | 0.0707 | 0.9933 | 3.1987 | 6.0112 | 5.3328 | 0.0336 | 3.1116 | 5.3570 |
| | B-IPWM1 | 6.1455 | 2.8652 | 0.0889 | 0.5880 | 2.9055 | 6.1814 | 4.4335 | 0.0653 | 1.5715 | 4.4693 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0177 | 3.1637 | 0.0707 | 0.9933 | 0.2753 | 6.0112 | 5.3328 | 0.0336 | 3.1116 | 0.2809 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.1455 | 2.8652 | 0.0889 | 0.5880 | 0.2425 | 6.1814 | 4.4335 | 0.0653 | 1.5715 | 0.2444 |
| 25 | MOM | 5.9518 | 3.2612 | 0.0504 | 0.7557 | 0.2407 | 5.9637 | 5.4811 | 0.0265 | 2.1369 | 0.2403 |
| | L-MOM | 6.2120 | 2.7040 | 0.0789 | 0.3454 | 0.2043 | 6.2858 | 3.9739 | 0.0950 | 1.4463 | 0.2614 |
| | U-IPWM1 | 6.0092 | 3.1214 | 0.0381 | 0.5800 | 3.1473 | 6.0015 | 5.2315 | 0.0162 | 1.5512 | 5.2485 |
| | B-IPWM1 | 6.0863 | 2.9479 | 0.0444 | 0.4239 | 2.9763 | 6.1035 | 4.6965 | 0.0265 | 1.0065 | 4.7187 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0092 | 3.1214 | 0.0381 | 0.5800 | 0.2180 | 6.0015 | 5.2315 | 0.0162 | 1.5512 | 0.2057 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0863 | 2.9479 | 0.0444 | 0.4239 | 0.2005 | 6.1035 | 4.6965 | 0.0265 | 1.0065 | 0.1850 |
| 50 | MOM | 5.9786 | 3.0990 | 0.0244 | 0.2533 | 0.1525 | 5.9861 | 5.2226 | 0.0120 | 0.9170 | 0.1613 |
| | L-MOM | 6.0844 | 2.8764 | 0.0235 | 0.1739 | 0.1344 | 6.1268 | 4.5167 | 0.0225 | 0.6157 | 0.1536 |
| | U-IPWM1 | 6.0059 | 3.0368 | 0.0178 | 0.2164 | 3.0546 | 6.0047 | 5.1046 | 0.0073 | 0.7237 | 5.1160 |
| | B-IPWM1 | 6.0443 | 2.9568 | 0.0195 | 0.1899 | 2.9756 | 6.0555 | 4.8444 | 0.0103 | 0.5875 | 4.8581 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0059 | 3.0368 | 0.0178 | 0.2164 | 0.1406 | 6.0047 | 5.1046 | 0.0073 | 0.7237 | 0.1446 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0443 | 2.9568 | 0.0195 | 0.1899 | 0.1360 | 6.0555 | 4.8444 | 0.0103 | 0.5875 | 0.1381 |
| 100 | MOM | 5.9892 | 3.0644 | 0.0120 | 0.1353 | 0.1107 | 5.9941 | 5.0776 | 0.0063 | 0.3727 | 0.1075 |
| | L-MOM | 6.0336 | 2.9698 | 0.0090 | 0.1062 | 0.1006 | 6.0568 | 4.7591 | 0.0066 | 0.2884 | 0.0982 |
| | U-IPWM1 | 6.0025 | 3.0341 | 0.0083 | 0.1207 | 3.0462 | 6.0038 | 5.0186 | 0.0037 | 0.3065 | 5.0266 |
| | B-IPWM1 | 6.0218 | 2.9943 | 0.0087 | 0.1119 | 3.0066 | 6.0291 | 4.8922 | 0.0045 | 0.2847 | 4.9012 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0025 | 3.0341 | 0.0083 | 0.1207 | 0.1037 | 6.0038 | 5.0186 | 0.0037 | 0.3065 | 0.0963 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0218 | 2.9943 | 0.0087 | 0.1119 | 0.1019 | 6.0291 | 4.8922 | 0.0045 | 0.2847 | 0.0949 |
| 150 | MOM | 5.9908 | 3.0366 | 0.0087 | 0.0822 | 0.0867 | 5.9947 | 5.0849 | 0.0040 | 0.2610 | 0.0888 |
| | L-MOM | 6.0181 | 2.9793 | 0.0064 | 0.0698 | 0.0803 | 6.0343 | 4.8792 | 0.0033 | 0.1958 | 0.0791 |
| | U-IPWM1 | 5.9998 | 3.0165 | 0.0062 | 0.0747 | 3.0271 | 6.0014 | 5.0444 | 0.0023 | 0.2196 | 5.0508 |
| | B-IPWM1 | 6.0126 | 2.9904 | 0.0063 | 0.0714 | 3.0011 | 6.0183 | 4.9589 | 0.0026 | 0.2033 | 4.9658 |
| | U-IPWM2(pro.) | 5.9998 | 3.0165 | 0.0062 | 0.0747 | 0.0817 | 6.0014 | 5.0444 | 0.0023 | 0.2196 | 0.0808 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0126 | 2.9904 | 0.0063 | 0.0714 | 0.0807 | 6.0183 | 4.9589 | 0.0026 | 0.2033 | 0.0789 |
| 250 | MOM | 5.9946 | 3.0300 | 0.0051 | 0.0449 | 0.0663 | 5.9966 | 5.0524 | 0.0024 | 0.1428 | 0.0666 |
| | L-MOM | 6.0092 | 2.9993 | 0.0035 | 0.0394 | 0.0611 | 6.0185 | 4.9387 | 0.0017 | 0.1129 | 0.0594 |
| | U-IPWM1 | 5.9998 | 3.0184 | 0.0035 | 0.0412 | 3.0262 | 6.0006 | 5.0282 | 0.0014 | 0.1216 | 5.0332 |
| | B-IPWM1 | 6.0075 | 3.0028 | 0.0036 | 0.0399 | 3.0106 | 6.0108 | 4.9771 | 0.0015 | 0.1160 | 4.9823 |
| | U-IPWM2(pro.) | 5.9998 | 3.0184 | 0.0035 | 0.0412 | 0.0621 | 6.0006 | 5.0282 | 0.0014 | 0.1216 | 0.0604 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0075 | 3.0028 | 0.0036 | 0.0399 | 0.0614 | 6.0108 | 4.9771 | 0.0015 | 0.1160 | 0.0597 |

تابع لجدول( 3 )

| n | method | Case -11 with ($\beta = 6, \gamma = 7$) | | | | | Case -12 with ($\beta = 6, \gamma = 9$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 5.9562 | 8.2495 | 0.0234 | 10.0558 | 0.3419 | 5.9576 | 10.8268 | 0.0168 | 16.7120 | 0.3486 |
| | L-MOM | 6.6167 | 3.9049 | 0.3929 | 9.8558 | 0.5450 | 6.6639 | 4.3440 | 0.4482 | 21.9223 | 0.6280 |
| | U-IPWM1 | 6.0078 | 7.5620 | 0.0152 | 6.3338 | 7.5780 | 6.0019 | 9.8574 | 0.0098 | 10.1733 | 9.8702 |
| | B-IPWM1 | 6.1981 | 5.8144 | 0.0536 | 3.2517 | 5.8485 | 6.2041 | 7.0510 | 0.0511 | 6.0196 | 7.0854 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0078 | 7.5620 | 0.0152 | 6.3338 | 0.2783 | 6.0019 | 9.8574 | 0.0098 | 10.1733 | 0.2767 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.1981 | 5.8144 | 0.0536 | 3.2517 | 0.2542 | 6.2041 | 7.0510 | 0.0511 | 6.0196 | 0.2708 |
| 25 | MOM | 5.9662 | 7.7892 | 0.0151 | 4.7222 | 0.2450 | 5.9762 | 9.8880 | 0.0101 | 7.1315 | 0.2293 |
| | L-MOM | 6.3353 | 4.9246 | 0.1192 | 4.7633 | 0.3525 | 6.3669 | 5.6440 | 0.1394 | 11.6925 | 0.4340 |
| | U-IPWM1 | 6.0003 | 7.3622 | 0.0088 | 3.2050 | 7.3746 | 6.0031 | 9.3490 | 0.0058 | 4.7973 | 9.3590 |
| | B-IPWM1 | 6.1139 | 6.2990 | 0.0215 | 2.0341 | 6.3197 | 6.1232 | 7.6724 | 0.0209 | 3.6905 | 7.6936 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0003 | 7.3622 | 0.0088 | 3.2050 | 0.2045 | 6.0031 | 9.3490 | 0.0058 | 4.7973 | 0.1902 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.1139 | 6.2990 | 0.0215 | 2.0341 | 0.1905 | 6.1232 | 7.6724 | 0.0209 | 3.6905 | 0.2025 |
| 50 | MOM | 5.9884 | 7.2903 | 0.0074 | 1.8405 | 0.1597 | 5.9907 | 9.3732 | 0.0049 | 3.0913 | 0.1579 |
| | L-MOM | 6.1510 | 5.8867 | 0.0260 | 1.7817 | 0.1930 | 6.1678 | 7.0899 | 0.0303 | 4.3276 | 0.2415 |
| | U-IPWM1 | 6.0032 | 7.1100 | 0.0039 | 1.4101 | 7.1182 | 6.0031 | 9.1280 | 0.0026 | 2.2907 | 9.1348 |
| | B-IPWM1 | 6.0596 | 6.5902 | 0.0074 | 1.1632 | 6.6021 | 6.0628 | 8.2683 | 0.0065 | 2.0208 | 8.2797 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0032 | 7.1100 | 0.0039 | 1.4101 | 0.1388 | 6.0031 | 9.1280 | 0.0026 | 2.2907 | 0.1367 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0596 | 6.5902 | 0.0074 | 1.1632 | 0.1355 | 6.0628 | 8.2683 | 0.0065 | 2.0208 | 0.1418 |
| 100 | MOM | 5.9923 | 7.1518 | 0.0041 | 0.8517 | 0.1129 | 5.9927 | 9.2341 | 0.0026 | 1.3099 | 0.1081 |
| | L-MOM | 6.0678 | 6.4563 | 0.0065 | 0.7163 | 0.1124 | 6.0760 | 8.0476 | 0.0069 | 1.4620 | 0.1277 |
| | U-IPWM1 | 6.0005 | 7.0539 | 0.0022 | 0.6638 | 7.0601 | 5.9996 | 9.1025 | 0.0013 | 0.9980 | 9.1073 |
| | B-IPWM1 | 6.0286 | 6.7927 | 0.0030 | 0.6042 | 6.8000 | 6.0294 | 8.6610 | 0.0021 | 0.9159 | 8.6672 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0005 | 7.0539 | 0.0022 | 0.6638 | 0.0988 | 5.9996 | 9.1025 | 0.0013 | 0.9980 | 0.0946 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0286 | 6.7927 | 0.0030 | 0.6042 | 0.0981 | 6.0294 | 8.6610 | 0.0021 | 0.9159 | 0.0936 |
| 150 | MOM | 5.9955 | 7.1111 | 0.0025 | 0.5298 | 0.0879 | 5.9944 | 9.2080 | 0.0019 | 0.9477 | 0.0908 |
| | L-MOM | 6.0425 | 6.6681 | 0.0030 | 0.4162 | 0.0831 | 6.0486 | 8.4043 | 0.0032 | 0.8257 | 0.0922 |
| | U-IPWM1 | 6.0004 | 7.0508 | 0.0013 | 0.4134 | 7.0556 | 5.9995 | 9.1084 | 0.0009 | 0.7087 | 9.1123 |
| | B-IPWM1 | 6.0192 | 6.8757 | 0.0017 | 0.3840 | 6.8811 | 6.0194 | 8.8100 | 0.0013 | 0.6415 | 8.8148 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0004 | 7.0508 | 0.0013 | 0.4134 | 0.0765 | 5.9995 | 9.1084 | 0.0009 | 0.7087 | 0.0779 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0192 | 6.8757 | 0.0017 | 0.3840 | 0.0760 | 6.0194 | 8.8100 | 0.0013 | 0.6415 | 0.0765 |
| 250 | MOM | 5.9981 | 7.0629 | 0.0015 | 0.2859 | 0.0654 | 5.9972 | 9.0802 | 0.0011 | 0.4907 | 0.0661 |
| | L-MOM | 6.0247 | 6.8104 | 0.0014 | 0.2305 | 0.0606 | 6.0277 | 8.6241 | 0.0012 | 0.4405 | 0.0657 |
| | U-IPWM1 | 6.0012 | 7.0265 | 0.0008 | 0.2289 | 7.0302 | 6.0000 | 9.0262 | 0.0005 | 0.3753 | 9.0292 |
| | B-IPWM1 | 6.0125 | 6.9216 | 0.0009 | 0.2202 | 6.9257 | 6.0119 | 8.8490 | 0.0006 | 0.3673 | 8.8524 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0012 | 7.0265 | 0.0008 | 0.2289 | 0.0575 | 6.0000 | 9.0262 | 0.0005 | 0.3753 | 0.0568 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0125 | 6.9216 | 0.0009 | 0.2202 | 0.0576 | 6.0119 | 8.8490 | 0.0006 | 0.3673 | 0.0576 |

نلاحظ بشكل عام من الجدول (3):

للحالة–9وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$)،تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و-U IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات، وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$)،فقد أعطت طريقة (L-MOM) اقل قيمة لهذا المعيار مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD،تعد طريقة -B IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لإحجام العينات الصغيرة $(\mathbf{n \leq 25})$،في حين تكون طريقة L-MOM الافضل لإحجام العينات $(\mathbf{n \geq 50})$.

للحالة–10 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و -U IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) الافضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار. وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD، تعد الطريقة B-IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات.

للحالة– 11 و للحالة–12 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$ ، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار. وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار الانحراف الكلي (TD)، تعد الطريقة -B IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات عدا n=250 ،فقد أعطت طريقة U-IPWM2(Pro.) اقل قيمة لهذا المعيار مقارنة ببقية الطرائق .

**جدول( 4 )**

**يبين القيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع القوى ( Power Dist$^{n}$. ) مع متوسط مربعات الخطأ لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي،حين تكون الحالات المفترضة بالمعلمتين ($\beta = 8, \gamma = 3,5,7,9$) ، وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM2)ولكل إحجام العينات المفترضة في البحث.**

| n | method | Case -13 with ($\beta = 8, \gamma = 3$) | | | | | Case -14 with ($\beta = 8, \gamma = 5$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 7.9038 | 3.4427 | 0.1538 | 1.4503 | 0.3244 | 7.9257 | 5.7982 | 0.0734 | 4.4473 | 0.3300 |
| | L-MOM | 8.5582 | 2.4327 | 0.4128 | 0.5475 | 0.2847 | 8.7289 | 3.3041 | 0.5725 | 3.1724 | 0.4304 |
| | U-IPWM1 | 8.0260 | 3.2041 | 0.1195 | 1.0005 | 3.2384 | 8.0150 | 5.3519 | 0.0488 | 2.9671 | 5.3734 |
| | B-IPWM1 | 8.1982 | 2.8978 | 0.1524 | 0.5760 | 2.9374 | 8.2424 | 4.4493 | 0.1056 | 1.5174 | 4.4839 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0260 | 3.2041 | 0.1195 | 1.0005 | 0.2781 | 8.0150 | 5.3519 | 0.0488 | 2.9671 | 0.2783 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.1982 | 2.8978 | 0.1524 | 0.5760 | 0.2398 | 8.2424 | 4.4493 | 0.1056 | 1.5174 | 0.2425 |
| 25 | MOM | 7.9421 | 3.2443 | 0.0943 | 0.6986 | 0.2360 | 7.9567 | 5.4839 | 0.0474 | 2.1788 | 0.2447 |
| | L-MOM | 8.2806 | 2.7051 | 0.1384 | 0.3356 | 0.1999 | 8.3880 | 3.9661 | 0.1736 | 1.4465 | 0.2619 |
| | U-IPWM1 | 8.0145 | 3.1122 | 0.0700 | 0.5425 | 3.1384 | 8.0077 | 5.2261 | 0.0291 | 1.5293 | 5.2429 |
| | B-IPWM1 | 8.1172 | 2.9406 | 0.0817 | 0.3990 | 2.9692 | 8.1438 | 4.6925 | 0.0490 | 1.0010 | 4.7153 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0145 | 3.1122 | 0.0700 | 0.5425 | 0.2128 | 8.0077 | 5.2261 | 0.0291 | 1.5293 | 0.2083 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.1172 | 2.9406 | 0.0817 | 0.3990 | 0.1962 | 8.1438 | 4.6925 | 0.0490 | 1.0010 | 0.1869 |
| 50 | MOM | 7.9733 | 3.0862 | 0.0463 | 0.2859 | 0.1596 | 7.9773 | 5.1893 | 0.0239 | 0.8639 | 0.1573 |
| | L-MOM | 8.1158 | 2.8613 | 0.0427 | 0.1991 | 0.1431 | 8.1665 | 4.4874 | 0.0403 | 0.6260 | 0.1549 |
| | U-IPWM1 | 8.0112 | 3.0216 | 0.0331 | 0.2456 | 3.0396 | 8.0037 | 5.0672 | 0.0144 | 0.6818 | 5.0793 |
| | B-IPWM1 | 8.0621 | 2.9422 | 0.0363 | 0.2175 | 2.9615 | 8.0712 | 4.8114 | 0.0193 | 0.5713 | 4.8254 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0112 | 3.0216 | 0.0331 | 0.2456 | 0.1483 | 8.0037 | 5.0672 | 0.0144 | 0.6818 | 0.1402 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0621 | 2.9422 | 0.0363 | 0.2175 | 0.1443 | 8.0712 | 4.8114 | 0.0193 | 0.5713 | 0.1356 |
| 100 | MOM | 7.9817 | 3.0464 | 0.0211 | 0.1249 | 0.1069 | 7.9889 | 5.1095 | 0.0112 | 0.3881 | 0.1088 |
| | L-MOM | 8.0427 | 2.9503 | 0.0159 | 0.1005 | 0.0974 | 8.0712 | 4.7924 | 0.0111 | 0.2857 | 0.0980 |
| | U-IPWM1 | 8.0011 | 3.0141 | 0.0147 | 0.1117 | 3.0260 | 8.0007 | 5.0550 | 0.0066 | 0.3237 | 5.0631 |
| | B-IPWM1 | 8.0267 | 2.9749 | 0.0153 | 0.1050 | 2.9871 | 8.0345 | 4.9266 | 0.0078 | 0.2913 | 4.9354 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0011 | 3.0141 | 0.0147 | 0.1117 | 0.1003 | 8.0007 | 5.0550 | 0.0066 | 0.3237 | 0.0985 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0267 | 2.9749 | 0.0153 | 0.1050 | 0.0985 | 8.0345 | 4.9266 | 0.0078 | 0.2913 | 0.0955 |
| 150 | MOM | 7.9887 | 3.0405 | 0.0135 | 0.0757 | 0.0853 | 7.9939 | 5.0700 | 0.0077 | 0.2632 | 0.0903 |
| | L-MOM | 8.0261 | 2.9821 | 0.0097 | 0.0649 | 0.0784 | 8.0462 | 4.8658 | 0.0063 | 0.1976 | 0.0808 |
| | U-IPWM1 | 8.0016 | 3.0194 | 0.0093 | 0.0696 | 3.0291 | 8.0027 | 5.0287 | 0.0044 | 0.2167 | 5.0353 |
| | B-IPWM1 | 8.0188 | 2.9932 | 0.0096 | 0.0663 | 3.0031 | 8.0252 | 4.9438 | 0.0050 | 0.2032 | 4.9509 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0016 | 3.0194 | 0.0093 | 0.0696 | 0.0805 | 8.0027 | 5.0287 | 0.0044 | 0.2167 | 0.0815 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0188 | 2.9932 | 0.0096 | 0.0663 | 0.0790 | 8.0252 | 4.9438 | 0.0050 | 0.2032 | 0.0804 |
| 250 | MOM | 7.9940 | 3.0164 | 0.0084 | 0.0433 | 0.0648 | 7.9952 | 5.0526 | 0.0045 | 0.1458 | 0.0672 |
| | L-MOM | 8.0131 | 2.9864 | 0.0059 | 0.0384 | 0.0603 | 8.0238 | 4.9407 | 0.0031 | 0.1150 | 0.0599 |
| | U-IPWM1 | 8.0009 | 3.0049 | 0.0058 | 0.0397 | 3.0127 | 8.0002 | 5.0300 | 0.0027 | 0.1245 | 5.0351 |
| | B-IPWM1 | 8.0112 | 2.9895 | 0.0059 | 0.0388 | 2.9972 | 8.0137 | 4.9789 | 0.0029 | 0.1186 | 4.9842 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0009 | 3.0049 | 0.0058 | 0.0397 | 0.0610 | 8.0002 | 5.0300 | 0.0027 | 0.1245 | 0.0609 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0112 | 2.9895 | 0.0059 | 0.0388 | 0.0606 | 8.0137 | 4.9789 | 0.0029 | 0.1186 | 0.0601 |

تابع لجدول( 4 )

| n | method | Case -15 with ($\beta = 8, \gamma = 7$) | | | | | Case -16 with ($\beta = 8, \gamma = 9$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 7.9365 | 8.3144 | 0.0453 | 11.6848 | 0.3539 | 7.9433 | 10.7192 | 0.0305 | 17.2880 | 0.3445 |
| | L-MOM | 8.8192 | 3.9013 | 0.6937 | 9.8829 | 0.5451 | 8.8800 | 4.3312 | 0.7892 | 22.0538 | 0.6288 |
| | U-IPWM1 | 8.0063 | 7.5991 | 0.0278 | 7.2736 | 7.6157 | 8.0018 | 9.7684 | 0.0181 | 10.5163 | 9.7817 |
| | B-IPWM1 | 8.2599 | 5.8246 | 0.0942 | 3.3792 | 5.8583 | 8.2707 | 6.9993 | 0.0906 | 6.2940 | 7.0336 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0063 | 7.5991 | 0.0278 | 7.2736 | 0.2879 | 8.0018 | 9.7684 | 0.0181 | 10.5163 | 0.2768 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.2599 | 5.8246 | 0.0942 | 3.3792 | 0.2574 | 8.2707 | 6.9993 | 0.0906 | 6.2940 | 0.2779 |
| 25 | MOM | 7.9560 | 7.7513 | 0.0282 | 4.4452 | 0.2430 | 7.9636 | 9.9968 | 0.0188 | 7.6594 | 0.2396 |
| | L-MOM | 8.4442 | 4.9224 | 0.2100 | 4.7510 | 0.3526 | 8.4861 | 5.6673 | 0.2454 | 11.5514 | 0.4311 |
| | U-IPWM1 | 7.9986 | 7.3452 | 0.0157 | 3.0651 | 7.3574 | 7.9992 | 9.4411 | 0.0106 | 5.0194 | 9.4514 |
| | B-IPWM1 | 8.1501 | 6.2885 | 0.0379 | 1.9854 | 6.3092 | 8.1596 | 7.7317 | 0.0359 | 3.6284 | 7.7524 |
| | U-IPWM2(pro.) | 7.9986 | 7.3452 | 0.0157 | 3.0651 | 0.2032 | 7.9992 | 9.4411 | 0.0106 | 5.0194 | 0.1975 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.1501 | 6.2885 | 0.0379 | 1.9854 | 0.1869 | 8.1596 | 7.7317 | 0.0359 | 3.6284 | 0.2009 |
| 50 | MOM | 7.9796 | 7.3777 | 0.0125 | 1.9178 | 0.1635 | 7.9860 | 9.4682 | 0.0091 | 3.4335 | 0.1637 |
| | L-MOM | 8.2000 | 5.9282 | 0.0460 | 1.6982 | 0.1877 | 8.2252 | 7.1151 | 0.0546 | 4.2350 | 0.2401 |
| | U-IPWM1 | 8.0009 | 7.1832 | 0.0069 | 1.4316 | 7.1915 | 8.0037 | 9.1964 | 0.0048 | 2.4421 | 9.2033 |
| | B-IPWM1 | 8.0763 | 6.6526 | 0.0126 | 1.1223 | 6.6640 | 8.0835 | 8.3231 | 0.0117 | 2.0136 | 8.3345 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0009 | 7.1832 | 0.0069 | 1.4316 | 0.1423 | 8.0037 | 9.1964 | 0.0048 | 2.4421 | 0.1389 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0763 | 6.6526 | 0.0126 | 1.1223 | 0.1352 | 8.0835 | 8.3231 | 0.0117 | 2.0136 | 0.1425 |
| 100 | MOM | 7.9883 | 7.1882 | 0.0068 | 0.7980 | 0.1084 | 7.9885 | 9.3035 | 0.0042 | 1.5401 | 0.1121 |
| | L-MOM | 8.0884 | 6.4949 | 0.0113 | 0.6657 | 0.1082 | 8.0996 | 8.0969 | 0.0119 | 1.4368 | 0.1262 |
| | U-IPWM1 | 7.9991 | 7.0953 | 0.0037 | 0.6436 | 7.1012 | 7.9978 | 9.1660 | 0.0021 | 1.1575 | 9.1705 |
| | B-IPWM1 | 8.0367 | 6.8310 | 0.0050 | 0.5675 | 6.8381 | 8.0376 | 8.7175 | 0.0035 | 0.9928 | 8.7236 |
| | U-IPWM2(pro.) | 7.9991 | 7.0953 | 0.0037 | 0.6436 | 0.0963 | 7.9978 | 9.1660 | 0.0021 | 1.1575 | 0.0973 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0367 | 6.8310 | 0.0050 | 0.5675 | 0.0939 | 8.0376 | 8.7175 | 0.0035 | 0.9928 | 0.0960 |
| 150 | MOM | 7.9933 | 7.0889 | 0.0046 | 0.4396 | 0.0825 | 7.9941 | 9.1614 | 0.0031 | 0.8510 | 0.0855 |
| | L-MOM | 8.0566 | 6.6479 | 0.0054 | 0.3913 | 0.0812 | 8.0652 | 8.3779 | 0.0057 | 0.8242 | 0.0937 |
| | U-IPWM1 | 8.0003 | 7.0287 | 0.0024 | 0.3513 | 7.0336 | 8.0003 | 9.0718 | 0.0015 | 0.6496 | 9.0757 |
| | B-IPWM1 | 8.0253 | 6.8549 | 0.0030 | 0.3360 | 6.8604 | 8.0268 | 8.7761 | 0.0022 | 0.6100 | 8.7809 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0003 | 7.0287 | 0.0024 | 0.3513 | 0.0724 | 8.0003 | 9.0718 | 0.0015 | 0.6496 | 0.0737 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0253 | 6.8549 | 0.0030 | 0.3360 | 0.0726 | 8.0268 | 8.7761 | 0.0022 | 0.6100 | 0.0744 |
| 250 | MOM | 7.9964 | 7.0769 | 0.0025 | 0.2969 | 0.0671 | 7.9957 | 9.1096 | 0.0019 | 0.5927 | 0.0726 |
| | L-MOM | 8.0323 | 6.8202 | 0.0023 | 0.2351 | 0.0612 | 8.0357 | 8.6557 | 0.0021 | 0.4907 | 0.0681 |
| | U-IPWM1 | 8.0009 | 7.0376 | 0.0013 | 0.2395 | 7.0412 | 7.9991 | 9.0587 | 0.0009 | 0.4714 | 9.0617 |
| | B-IPWM1 | 8.0159 | 6.9323 | 0.0016 | 0.2278 | 6.9363 | 8.0150 | 8.8800 | 0.0011 | 0.4446 | 8.8834 |
| | U-IPWM2(pro.) | 8.0009 | 7.0376 | 0.0013 | 0.2395 | 0.0595 | 7.9991 | 9.0587 | 0.0009 | 0.4714 | 0.0636 |
| | B-IPWM2(pro.) | 8.0159 | 6.9323 | 0.0016 | 0.2278 | 0.0590 | 8.0150 | 8.8800 | 0.0011 | 0.4446 | 0.0628 |

نلاحظ بشكل عام من الجدول (4):

للحالة– 13 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)**MSE** ، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\gamma}$)**MSE**،فقد أعطت طريقة L-MOM اقل قيمة لهذا المعيار مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار الانحراف الكلي (TD) ، تعد طريقة B-IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لأحجام العينات الصغيرة **($n \le 25$)**،في حين تكون طريقة L-MOM الأفضل لبقية حجوم العينات **($n \ge 50$)**.

للحالة– 14 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)**MSE** ، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\gamma}$)**MSE**، تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث لحجوم العينات **($n \le 50$)**، في حين أعطت طريقة L-MOM اقل قيمة لهذا المعيار عند بقية حجوم العينات **($n \ge 50$)**.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار (TD) ،تعد طريقة B-IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث لكل حجوم العينات عدا n=250،فقد أعطت طريقة L-MOM اقل قيمة لهذا المعيار وهي TD=0.0599عندما تكون n=250 .

للحالة– 15 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)**MSE** ، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\gamma}$)**MSE**،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD فان طريقة B-IPWM2(Pro.) المقترحة تعد الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث لكل حجوم العينات عدا ,n=150فقد أعطت طريقة L-MOM اقل قيمة لهذا المعيار وهي TD=0.0724عندما تكون n=150.

للحالة– 16 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار ($\hat{\beta}$)**MSE** ، تعد طريقتي التقدير U-IPWM1 و U-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل

قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B-IPWM1 و B-IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD، تعد طريقة U-IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث لكل حجوم العينات عدا n=100,250،فقد أعطت طريقة B-IPWM2(Pro.) اقل قيمة لهذا المعيار عندما تكون n=100,250.

جدول( 5 ) يبين القيم المقدرة لمعلمتي الشكل و القياس للتوزيع القوى ( Power Dist$^{n}$. ) مع متوسط مربعات الخطأ لكلا المعلمتين المقدرة والانحراف الكلي،حين تكون الحالات المفترضة بالمعلمتين $(\beta = \gamma = 2, 5, 6, 9)$ ،وفقا لطرائق التقدير المختلفة مقارنة بطريقة التقدير المقترحة (IPWM2) ولكل إحجام العينات المفترضة في البحث.

| n | method | Case -17 with ($\beta = \gamma = 2$) | | | | | Case -18 with ($\beta = \gamma = 5$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 1.9659 | 2.2278 | 0.0179 | 0.5682 | 0.3170 | 4.9527 | 5.8180 | 0.0322 | 4.6397 | 0.3331 |
| | L-MOM | 2.1026 | 1.7758 | 0.0244 | 0.2202 | 0.2611 | 5.4503 | 3.3110 | 0.2205 | 3.1337 | 0.4281 |
| | U-IPWM1 | 2.0087 | 2.0785 | 0.0159 | 0.4218 | 2.1281 | 5.0057 | 5.3700 | 0.0216 | 3.0067 | 5.3929 |
| | B-IPWM1 | 2.0351 | 1.9742 | 0.0163 | 0.2965 | 2.0248 | 5.1478 | 4.4617 | 0.0425 | 1.4979 | 4.4963 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0087 | 2.0785 | 0.0159 | 0.4218 | 0.2886 | 5.0057 | 5.3700 | 0.0216 | 3.0067 | 0.2743 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0351 | 1.9742 | 0.0163 | 0.2965 | 0.2612 | 5.1478 | 4.4617 | 0.0425 | 1.4979 | 0.2371 |
| 25 | MOM | 1.9827 | 2.1384 | 0.0101 | 0.2686 | 0.2294 | 4.9726 | 5.4719 | 0.0162 | 2.1638 | 0.2367 |
| | L-MOM | 2.0497 | 1.9172 | 0.0105 | 0.1486 | 0.1946 | 5.2447 | 3.9576 | 0.0688 | 1.4899 | 0.2662 |
| | U-IPWM1 | 2.0065 | 2.0586 | 0.0087 | 0.2220 | 2.0952 | 5.0067 | 5.2132 | 0.0105 | 1.5968 | 5.2295 |
| | B-IPWM1 | 2.0230 | 2.0003 | 0.0089 | 0.1807 | 2.0380 | 5.0917 | 4.6810 | 0.0186 | 1.0461 | 4.7035 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0065 | 2.0586 | 0.0087 | 0.2220 | 0.2132 | 5.0067 | 5.2132 | 0.0105 | 1.5968 | 0.2068 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0230 | 2.0003 | 0.0089 | 0.1807 | 0.2004 | 5.0917 | 4.6810 | 0.0186 | 1.0461 | 0.1895 |
| 50 | MOM | 1.9899 | 2.0799 | 0.0047 | 0.1175 | 0.1591 | 4.9848 | 5.2839 | 0.0092 | 0.9343 | 0.1623 |
| | L-MOM | 2.0169 | 1.9921 | 0.0040 | 0.0895 | 0.1445 | 5.1033 | 4.5578 | 0.0155 | 0.5697 | 0.1480 |
| | U-IPWM1 | 2.0016 | 2.0417 | 0.0039 | 0.1053 | 2.0667 | 5.0006 | 5.1614 | 0.0055 | 0.7320 | 5.1731 |
| | B-IPWM1 | 2.0100 | 2.0141 | 0.0039 | 0.0952 | 2.0393 | 5.0431 | 4.8953 | 0.0073 | 0.5659 | 4.9089 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0016 | 2.0417 | 0.0039 | 0.1053 | 0.1518 | 5.0006 | 5.1614 | 0.0055 | 0.7320 | 0.1423 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0100 | 2.0141 | 0.0039 | 0.0952 | 0.1470 | 5.0431 | 4.8953 | 0.0073 | 0.5659 | 0.1337 |
| 100 | MOM | 1.9973 | 2.0275 | 0.0025 | 0.0557 | 0.1130 | 4.9926 | 5.0893 | 0.0046 | 0.3617 | 0.1057 |
| | L-MOM | 2.0084 | 1.9927 | 0.0021 | 0.0502 | 0.1081 | 5.0445 | 4.7734 | 0.0046 | 0.2812 | 0.0980 |
| | U-IPWM1 | 2.0029 | 2.0097 | 0.0020 | 0.0528 | 2.0275 | 5.0005 | 5.0325 | 0.0028 | 0.3035 | 5.0408 |
| | B-IPWM1 | 2.0071 | 1.9968 | 0.0021 | 0.0506 | 2.0147 | 5.0216 | 4.9054 | 0.0032 | 0.2786 | 4.9145 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0029 | 2.0097 | 0.0020 | 0.0528 | 0.1096 | 5.0005 | 5.0325 | 0.0028 | 0.3035 | 0.0962 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0071 | 1.9968 | 0.0021 | 0.0506 | 0.1084 | 5.0216 | 4.9054 | 0.0032 | 0.2786 | 0.0944 |
| 150 | MOM | 1.9965 | 2.0067 | 0.0016 | 0.0334 | 0.0886 | 4.9970 | 5.0714 | 0.0030 | 0.2598 | 0.0883 |
| | L-MOM | 2.0035 | 1.9846 | 0.0013 | 0.0310 | 0.0848 | 5.0286 | 4.8733 | 0.0024 | 0.1903 | 0.0782 |
| | U-IPWM1 | 2.0005 | 1.9938 | 0.0013 | 0.0318 | 2.0079 | 5.0016 | 5.0354 | 0.0017 | 0.2116 | 5.0420 |
| | B-IPWM1 | 2.0033 | 1.9854 | 0.0013 | 0.0311 | 1.9996 | 5.0157 | 4.9502 | 0.0019 | 0.1975 | 4.9573 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0005 | 1.9938 | 0.0013 | 0.0318 | 0.0855 | 5.0016 | 5.0354 | 0.0017 | 0.2116 | 0.0790 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0033 | 1.9854 | 0.0013 | 0.0311 | 0.0849 | 5.0157 | 4.9502 | 0.0019 | 0.1975 | 0.0779 |
| 250 | MOM | 1.9982 | 2.0071 | 0.0010 | 0.0182 | 0.0653 | 4.9976 | 5.0457 | 0.0016 | 0.1526 | 0.0685 |
| | L-MOM | 2.0020 | 1.9953 | 0.0008 | 0.0175 | 0.0634 | 5.0156 | 4.9336 | 0.0012 | 0.1211 | 0.0616 |
| | U-IPWM1 | 2.0006 | 1.9994 | 0.0008 | 0.0177 | 2.0106 | 5.0008 | 5.0228 | 0.0009 | 0.1299 | 5.0277 |
| | B-IPWM1 | 2.0023 | 1.9944 | 0.0008 | 0.0175 | 2.0056 | 5.0092 | 4.9718 | 0.0010 | 0.1244 | 4.9770 |
| | U-IPWM2(pro.) | 2.0006 | 1.9994 | 0.0008 | 0.0177 | 0.0636 | 5.0008 | 5.0228 | 0.0009 | 0.1299 | 0.0623 |
| | B-IPWM2(pro.) | 2.0023 | 1.9944 | 0.0008 | 0.0175 | 0.0634 | 5.0092 | 4.9718 | 0.0010 | 0.1244 | 0.0618 |

تابع لجدول( 5 )

| n | method | Case -19 with ($\beta = \gamma = 6$) | | | | | Case -20 with ($\beta = \gamma = 9$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD | $\hat{\beta}$ | $\hat{\gamma}$ | MSE($\hat{\beta}$) | MSE($\hat{\gamma}$) | TD |
| 15 | MOM | 5.9462 | 7.0693 | 0.0332 | 6.7810 | 0.3332 | 8.9352 | 10.7372 | 0.0386 | 17.5289 | 0.3485 |
| | L-MOM | 6.5841 | 3.6470 | 0.3584 | 5.8227 | 0.4895 | 9.9876 | 4.3295 | 0.9942 | 22.0548 | 0.6287 |
| | U-IPWM1 | 6.0036 | 6.5083 | 0.0214 | 4.3652 | 6.5272 | 9.0015 | 9.7611 | 0.0225 | 10.5368 | 9.7740 |
| | B-IPWM1 | 6.1860 | 5.1936 | 0.0551 | 2.1326 | 5.2276 | 9.3040 | 6.9947 | 0.1140 | 6.3272 | 7.0290 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0036 | 6.5083 | 0.0214 | 4.3652 | 0.2731 | 9.0015 | 9.7611 | 0.0225 | 10.5368 | 0.2764 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.1860 | 5.1936 | 0.0551 | 2.1326 | 0.2396 | 9.3040 | 6.9947 | 0.1140 | 6.3272 | 0.2796 |
| 25 | MOM | 5.9660 | 6.5777 | 0.0208 | 3.0858 | 0.2426 | 8.9644 | 10.0287 | 0.0241 | 8.0097 | 0.2477 |
| | L-MOM | 6.3097 | 4.4704 | 0.1055 | 2.7448 | 0.3075 | 9.5517 | 5.6806 | 0.3151 | 11.5094 | 0.4301 |
| | U-IPWM1 | 5.9998 | 6.2539 | 0.0122 | 2.1133 | 6.2687 | 9.0037 | 9.4847 | 0.0132 | 5.3774 | 9.4947 |
| | B-IPWM1 | 6.1083 | 5.4863 | 0.0236 | 1.4115 | 5.5074 | 9.1843 | 7.7569 | 0.0469 | 3.6886 | 7.7783 |
| | U-IPWM2(pro.) | 5.9998 | 6.2539 | 0.0122 | 2.1133 | 0.2029 | 9.0037 | 9.4847 | 0.0132 | 5.3774 | 0.2055 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.1083 | 5.4863 | 0.0236 | 1.4115 | 0.1859 | 9.1843 | 7.7569 | 0.0469 | 3.6886 | 0.2017 |
| 50 | MOM | 5.9811 | 6.2678 | 0.0102 | 1.2728 | 0.1580 | 8.9837 | 9.4391 | 0.0117 | 3.0672 | 0.1607 |
| | L-MOM | 6.1362 | 5.2251 | 0.0234 | 1.0480 | 0.1687 | 9.2513 | 7.1196 | 0.0681 | 4.2195 | 0.2383 |
| | U-IPWM1 | 5.9988 | 6.1092 | 0.0057 | 0.9649 | 6.1191 | 9.0024 | 9.1906 | 0.0060 | 2.2840 | 9.1974 |
| | B-IPWM1 | 6.0528 | 5.7298 | 0.0084 | 0.7913 | 5.7422 | 9.0921 | 8.3196 | 0.0144 | 1.9288 | 8.3309 |
| | U-IPWM2(pro.) | 5.9988 | 6.1092 | 0.0057 | 0.9649 | 0.1384 | 9.0024 | 9.1906 | 0.0060 | 2.2840 | 0.1385 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0528 | 5.7298 | 0.0084 | 0.7913 | 0.1325 | 9.0921 | 8.3196 | 0.0144 | 1.9288 | 0.1401 |
| 100 | MOM | 5.9910 | 6.1506 | 0.0048 | 0.5462 | 0.1059 | 8.9924 | 9.1752 | 0.0059 | 1.3477 | 0.1098 |
| | L-MOM | 6.0612 | 5.6582 | 0.0063 | 0.4340 | 0.1009 | 9.1165 | 8.0067 | 0.0161 | 1.5541 | 0.1314 |
| | U-IPWM1 | 5.9999 | 6.0760 | 0.0028 | 0.4534 | 6.0830 | 9.0022 | 9.0481 | 0.0029 | 1.0258 | 9.0528 |
| | B-IPWM1 | 6.0269 | 5.8854 | 0.0035 | 0.4027 | 5.8933 | 9.0470 | 8.6117 | 0.0051 | 0.9814 | 8.6181 |
| | U-IPWM2(pro.) | 5.9999 | 6.0760 | 0.0028 | 0.4534 | 0.0952 | 9.0022 | 9.0481 | 0.0029 | 1.0258 | 0.0951 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0269 | 5.8854 | 0.0035 | 0.4027 | 0.0917 | 9.0470 | 8.6117 | 0.0051 | 0.9814 | 0.0960 |
| 150 | MOM | 5.9940 | 6.1167 | 0.0034 | 0.3987 | 0.0900 | 8.9968 | 9.1310 | 0.0036 | 0.8980 | 0.0888 |
| | L-MOM | 6.0377 | 5.8024 | 0.0031 | 0.2981 | 0.0819 | 9.0748 | 8.3674 | 0.0072 | 0.8609 | 0.0949 |
| | U-IPWM1 | 5.9997 | 6.0667 | 0.0018 | 0.3299 | 6.0724 | 9.0022 | 9.0563 | 0.0018 | 0.6843 | 9.0600 |
| | B-IPWM1 | 6.0177 | 5.9393 | 0.0021 | 0.3001 | 5.9455 | 9.0320 | 8.7615 | 0.0028 | 0.6488 | 8.7662 |
| | U-IPWM2(pro.) | 5.9997 | 6.0667 | 0.0018 | 0.3299 | 0.0811 | 9.0022 | 9.0563 | 0.0018 | 0.6843 | 0.0767 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0177 | 5.9393 | 0.0021 | 0.3001 | 0.0794 | 9.0320 | 8.7615 | 0.0028 | 0.6488 | 0.0772 |
| 250 | MOM | 5.9968 | 6.0661 | 0.0019 | 0.2136 | 0.0668 | 8.9968 | 9.0656 | 0.0024 | 0.5318 | 0.0686 |
| | L-MOM | 6.0214 | 5.8886 | 0.0014 | 0.1661 | 0.0597 | 9.0412 | 8.6231 | 0.0028 | 0.4792 | 0.0681 |
| | U-IPWM1 | 6.0005 | 6.0351 | 0.0010 | 0.1770 | 6.0394 | 9.0002 | 9.0213 | 0.0011 | 0.4250 | 9.0243 |
| | B-IPWM1 | 6.0113 | 5.9592 | 0.0012 | 0.1680 | 5.9637 | 9.0180 | 8.8442 | 0.0015 | 0.4148 | 8.8476 |
| | U-IPWM2(pro.) | 6.0005 | 6.0351 | 0.0010 | 0.1770 | 0.0600 | 9.0002 | 9.0213 | 0.0011 | 0.4250 | 0.0607 |
| | B-IPWM2(pro.) | 6.0113 | 5.9592 | 0.0012 | 0.1680 | 0.0592 | 9.0180 | 8.8442 | 0.0015 | 0.4148 | 0.0613 |

نلاحظ بشكل عام من الجدول (5) في حالة تساوي قيم معلمتي توزيع دالة القوى:

للحالة– 17 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$ ، تعد طريقتي التقدير U–IPWM1 و U–IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث لحجوم العينات n=15,25,100، في حين تعطي كل طرائق التقدير اقل قيمة لهذا المعيار وهي $\mathbf{MSE}(\hat{\beta}) = \mathbf{0.0039}$ مقارنة بطريقتي MOM و L–MOM عندما يكون حجم العينة n=50.وكذلك أعطت كل طرائق التقدير نفس القيمة لهذا المعيار واقل مقارنة بطريقة MOM لحجوم العينات $\mathbf{(n \geq 150)}$.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقة L–MOM أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لحجوم العينات $\mathbf{(n \leq 150)}$،في حين أعطت طرائق التقدير L–MOM و B–IPWM1 و B–IPWM2(Pro.) اقل قيمة لهذا المعيار وهي $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma}) = \mathbf{0.0175}$ عندما يكون حجم العينة n=250.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار الانحراف الكلي (TD)،تعد طريقة L–MOM أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لحجوم العينات $\mathbf{(n \leq 150)}$ ، في حين أعطت الطريقتين L–MOMو B–IPWM2(Pro.) اقل قيمة لهذا المعيار وهي TD=0.0634 عندما يكون حجم العينة n=250.

للحالة– 18 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$ ، تعد طريقتي التقدير U–IPWM1 و U–IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B–IPWM1 و B–IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD،تعد طريقة B–IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لحجوم العينات $\mathbf{(n \leq 150)}$،في حين أعطت طريقتي التقدير L–MOM اقل قيمة لهذا المعيار وهي TD=0.0616 عندما يكون حجم العينة n=250.

للحالة– 19 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\beta})$ ، تعد طريقتي التقدير U–IPWM1 و U–IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $\mathbf{MSE}(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B–IPWM1 و B–IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لحجوم العينات $\mathbf{(n \leq 100)}$،في حين أعطت L–MOM اقل قيمة لهذا المعيار لبقية حجوم العينات $\mathbf{(n \geq 150)}$.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD،تعد طريقة B–IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل إحجام العينات.

للحالة– 20 وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $MSE(\hat{\beta})$ ، تعد طريقتي التقدير U–IPWM1 و U–IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة في البحث ولكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار $MSE(\hat{\gamma})$،تعد طريقتي التقدير B–IPWM1 و B–IPWM2(Pro.) الأفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات،وعموما فان الطريقتين المتقدم ذكرهما أعطت نفس القيمة لهذا المعيار.وفقا لمقياس اقل قيمة لمعيار TD ، تعد طريقة U–IPWM2(Pro.) أفضل مقارنة ببقية الطرائق المستخدمة لكل حجوم العينات.

## 5. الإستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال نتائج البحث وبشكل عام:

- بان طريقتي العزوم الاحتمالية الموزونة للنوع الأول (IPWM1) الغير متحيزة (U–IPWM1) و المتحيزة (B–IPWM1) والعزوم الاحتمالية الموزونة للنوع الثاني المقترح استخدامها (IPWM2) الغير متحيزة ((U–IPWM2(Pro.)) والمتحيزة ((B–IPWM2(Pro.)) لكل إحجام العينات ولكل النماذج المفترضة في البحث، فقد أعطت الطريقتين تقديرات متساوية لمعلمة الشكل ( $\gamma$ )ومعلمة القياس ( $\beta$ ) لتوزيع دالة القوى ، و لقيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) المحتسب لكلا المعلمتين المقدرة$(\beta,\gamma)$.
- بان طريقة العزوم الاحتمالية الموزونة للنوع الثاني المقترح استخدامها (IPWM2) الغير متحيزة ((U–IPWM2(Pro.)) والمتحيزة ((B–IPWM2(Pro.)) لكل إحجام العينات ولكل النماذج المفترضة في البحث ، فقد أعطت الطريقتين تقديرات اقل لمعيار الانحراف الكلي (TD) مقارنة بطرائق الأخرى لمعلمتين المقدرة$(\beta,\gamma)$.
- بان جودة التقدير تتحسن بزيادة حجم العينة بشكل عام لكل الطرائق المستخدمة وفقا لكل المعايير المستخدمة في البحث.

## References


1. **Hosking, J. R. M., (1990)," L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics", J. Roy. Statistical Soc., Series B, Vol.52, pp. 105-124.**
2. **Hosking, J.R.M. ,(1986), The theory of probability weighted moments, Research Report RC 12210, IBM Research Division, Yorktown Heights, NY.**
3. **Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R., (1979), 'Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form', Water Resources Research, 15(5): pp.1049-1054.**

4. **Landwehr, JM; Matalas, NC; Wallis, JR., (1979), "Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles". Water Resources Research Vol.15: pp.1055–1064.Doi: 10.1029/WR015i005p01055. Retrieved 4 Feb. 2013.**
5. **Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F.m, (1985)," Estimation of the generalized Extreme-Value Distribution by the Method of probability weighted moments", Technometrics, 27(3): pp. 251-261.**
6. **Cunnane ,C.,(1989),'Statistical Distributions for Flood Frequency Analysis'.WMO Operational Hydrology Report ,No.33.World Meteorological Organization Geneva, Switzerland.**
7. **Saran, P. ,(2004), Estimation of parameters of a Power function distribution and its characterization by kth record values. Statistica, anno, pp.3.**
8. **Chang, S.K., (2007), 'Characterization of the Power Function by the Independence of Record values', Journal of the Chungcheong Mathematical Society, Vol.20: pp.140-145.**
9. **Sinha, S.K., P. Singh, D nd .C. Singh and R. Singh, (2008), Preliminary test estimator for scale parameter of the power function distribution, Journal of Reliability and Statistics Studies ,Vol. 1: pp.18-27.**
10. **Hamdan, M., S., (2009),The Properties of L-moments Compared to Conventional Moments. Athesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of master of mathematics .The Islamic University of Gaza.**
11. **Haseeb A. and Mohd. F., (2011), 'Moments of Lower Generalized Order Statistics from Power Function Distribution and its Characterization', International Journal of Statistical Sciences, ISSN 1683–5603, Vol. 11(Special Issue), 2011, pp. 125-134, c 2011 Dept. of Statistics, Univ. of Rajshahi, Bangladesh.**
12. **Tanveer K., Muhammad A. and Sajid A., (2012),' Bayesian inference for the parameter of the power distribution', Journal of Reliability and Statistical Studies; ISSN (Print): 0974-8024, (Online):2229-5666, Vol. 5, Issue 2 (2012): pp.45-58.**
13. **Azam, Z., Navid F., and Ahmad S. A., (2013), 'A Note on Modified Estimators for the Parameters of the Power Function Distribution', International Journal of Advanced Science and Technology, Vol.59, pp.71-84.**
14. **Zahid, A., Mirza Naveed, S. and Farrukh, S., (2013), 'Parameter Estimation of Power Function Distribution with Moments', World Applied Sciences Journal, 26 (2): pp. 205-212, 2013 ISSN 1818-4952, ©IDOSI Publications, 2013, DOI: 10.5829/ idosi.wasj.2013.26.02.294.**
15. **Ahsanullah, M., Shakil, M., Golam Kibria, B.M. (2013), 'A characterization of power function distribution based on lower records', Prob. Stat. Forum, Vol. 06, PP. 68-72, ISSN 0974-3235.**
16. **Bickel, P.J. &Doksum, K. A., (1977), Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, Holden- Day, Inc., San Francisco.**
17. **Landwehr, J M., Matalas, NC. and Wallis, JR., (1979b), "Estimation of Parameters and Quantiles of Wakeby Distributions. Known Lower Bounds", Water Resources Research, 15(6), pp. 1361.**
18. **Wang, Q. J., (1996), "Direct Sample Estimators of L Moments". Water Resources Research 32 (12): pp.3617–3619. Doi: 10.1029/96WR02675.**

# Comparison between Probability Weighted Moments and Conventional Moments Estimators for Two Parameters Power Function Distribution

**Dr. Jinan Abbas Naser-Assistant professor**
**Technical College of Management – Baghdad**

## Abstract

In this study, methods of moments were used for estimating shape parameter and scale parameter for power function distribution, which include method of moment estimation (MOM), and method of L-moment estimation (L-MOM) and method of probability weighted moments (PWM) for type- 1 and type- 2 (proposed) for unbiased and biased estimators. Several models used from the power function distribution for data generating, for different sample sizes (small, medium, and large). The results were obtained by using simulation technique; programs written by using MATLAB program were used. To compare the performance for the methods used in this study, the mean squared error criterion (MSE) and total derivation (TD) for two parameters for the power function distribution were used as criterion to compare the performance for the methods. The results showing according to the two criterions (MSE &TD), that methods of probability weighted moments (PWM) for type -1 and type -2 (proposed) for unbiased and biased estimators have the same result for estimation parameters and MSE, but the method of probability weighted moments for type- 2 (proposed) for unbiased and biased estimators has lower values for the total derivation criterion among all of the methods were used, for all samples and cases which used in this study.

**Key Words**: The Power Function Distribution; Properties of the Power Function Distribution; Method of Moment (MOM) Estimators; Method of L- Moments (L-MOM) estimators; Method of Probability Weighted Moments (PWM) for Type- 1 and Type- 2 (proposed) for unbiased and biased estimators.