التقدير البيزي لدالة المعولية لتوزيع دالة القوة تحت دوال خسارة مختلفة.

الدكتورة ليلى مطر ناصر
كلية الهندسة –الجامعة المستنصرية

المستخلص:

يستخدم توزيع دالة القوة في نمذجة بيانات وقت البقاء للاجهزة الكهربائية.ويعتبر أنموذج إحصائي جيد لوصف الكثيرمن الظواهر خصوصا في مجال تحليل بيانات الحياة للمعدات الكهربائية .وتعتبر طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق التقليدية الشائعة الاستخدام في تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية.كما إن الطرائق البيزية استحوذت مؤخراً على اهتمام كبير خصوصاً في دراسات المقارنة مع الطرائق التقليدية.

يتم في هذا البحث دراسة ومقارنة طريقة الإمكان الأعظم مع الطرائق البيزية في ظل دوال خسارة مختلفة منها متماثلة "دالة الخسارة التربيعية" واخرى غير متماثلة"دالة الخسارة اللوغارتمية،دالة الخسارة الوقائية ودالة خسارة Linex" . لتقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوة ذي المعلمتين وللبيانات الكاملة.يتم اشتقاق طريقة الإمكان الأعظم وطريقة البيزية بالاعتماد على معلومات جيفري واستخدام تلك الطرائق لتقدير دالـــة المعولية.ومن خلال دراسة المحاكاة سيتم المقارنة بين تلك الطرائق عددياً من خلال الاعتماد على المؤشر الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE).وقد تبين تفوق طريقة بيز المعتمدة على دالة الخسارة التربيعية مقارنتا بالطرائق الاخرى.

ABSTRACT:

The Power function distribution has been widely used especially in the modeling of life time data .It provides a statistical model which has a wide variety of application in many areas .The conventional maximum likelihood method is the usual way to estimate the parameters of a probability distribution. Bayesian approach that depends on symmetric loss function “quadratic” and asymmetric loss function “precautionary ,logarithmic and linex” has received much attention in contention with other estimation methods. In this paper we explore and compare the performance of the maximum likelihood estimates with the Bayesian estimate of Reliability function for the two parameter Power function distribution. The maximum likelihood estimation, Bayesian using Jeffrey prior, for estimating the Reliability function of life time are presented. We explore the performance of these estimators numerically under varying conditions. Through the simulation study a comparison are made on the performance of these estimators with respect to the mean square error (MSE). Based on the results of this simulation study the Bayesian approach depends on logarithmic loss function used in the estimating of reliability function of the two parameter power function distribution is found to be superior compared to the conventional methods with respect to MSE values.

المقدمة وهدف البحث:

يعتبر توزيع دالة القوة Power function distribution من التوزيعات المهمة المستخدمة في تحليل بيانات اوقات الفشل للاجهزة والمعدات،وهو حالة خاصة من توزيع باريتو المشهور.في عام 1964قام الباحث[10] Rider باشتقاق توزيعات جديدة بالاعتماد على حاصل ضرب اوقسمة الاحصاءات المرتبة لتوزيع دالة القوة.في عام 1967قام الباحث[1] Malik باشتقاق العزوم للاحصاءات المرتبة المعتمدة على توزيع دالة القوة.في عام1974 قام الباحث[3] Ahsanullah بدراسة تقدير معلمة الموقع والقياس لتوزيع دالة القوة.في عام1978 قام الباحث

Kapadia [2] بدراسة حجم العينة المطلوب لتقدير المعلمات لتوزيع دالة القوة .في عام 1995توصل الباحثان[5] Meniconi and Barryبان توزيع دالة القوة هو افضل انموذج رياضي لوصف المعولية لاي جهاز كهربائي حيث تم استخدام توزيعات اخرى مثل التوزيع الاسي ،الوغاريتم الطبيعي وتوزيع ويبل وتم التوصل بان توزيع دالة القوة هو الافضل..في عام2012 قام الباحث [9] Munawar بدراسة التقدير البيزي لمعلمات توزيع دالة القوة تحت اسلوب المراقبة الهجينة وفي ظل دوال خسارة مختلفة. في عام 2013قام الباحث [10] Zarrin بدراسة التحليل البيزي وحساب معولية نظام يخضع لتوزيع دالة القوة. وفي عام2013 قام الباحثون [13] Feroze،Zaka و Akhterبدراسة طرائق مختلفة محورة لتقدير معلمات توزيع دالة القوة والتي تبين انها اكفاء من الطرائق القديمة يهدف هذا البحث إلى إجراء المقارنة التجريبية بين الطرائق البيزية وطريقة الإمكان الأعظم للتوصل إلى أفضل طريقةً في تقدير دالة المعولية لهذا التوزيع ووفقاً للمعيار الإحصائي متوسـط مربعات الخطأ (MSE).

الجانب النظري:

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوة power function distention هي:

$$f(t;\alpha,\beta)=\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}\quad;\quad 0<t<\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبذلك تكون دالة التوزيع لهذا التوزيع:

$$F(t;\alpha,\beta)=p[T\le t]=\int_0^t f(u;\alpha,\beta)du=\int_0^t \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}du$$

$$=\frac{t^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}\qquad ;0<t<\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ودالة المعولية:

$$R(t)=1-F(t)=1-\frac{t^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}\quad ;0<t<\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

طرائق التقدير:

1-دالة الامكان الاعظم (M.L.E) Maximum Likelihood Function:

ان الفكرة الاساسية لهذه الطريقة هي ايجاد قيم المعلمات التي تعظم دالة الامكان والتي هي دالة بقيم المشاهدات، بافتراض ان المشاهدات تم اخذها بشكل عشوائي فان دالة الامكان في حالة البيانزات التامة ستكون:

$$L(t_i,\alpha\ \ ,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i,\alpha,\beta)\ =\alpha^n\,\beta^{-\alpha n}\prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1} \qquad \ldots\ldots(4)$$

وبسبب ان المعادلة السابقة هي رتيبة. فان قيم β,α,التي تعظم المعادلة رقم (4) هي نفسها التي تعظم لوغاريتم تلك المعادلة. وباخذ اللوغاريتم للمعادلة رقم (4) فان:

$$\log L(\alpha,\beta)=n\log\alpha-\alpha n\ \log\beta+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log t_i \qquad \ldots\ldots(5)$$

وبافتراض ان المعلمة β هي ثابتة واشتقاق المعادلة السابقة بالنسبة الى α فان:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}=\frac{n}{\alpha}-n\log\beta+\sum_{i=1}^{n}\log t_i \qquad \ldots\ldots(6)$$

وبمساواة المعادلة السابقة للصفر وحلها بالنسبة الى α فان مقدرالامكان الاعظم سيكون

$$\hat{\alpha}_{M.l.e}=\frac{n}{\sum\log(\beta/t_i)} \qquad \ldots\ldots(7)$$

وبسبب كون مقدر الامكان الاعظم ثابت invariant في التحويل one–to–one فان مقدر دالة المعولية سيكون:

$$R(t)\hat{}_{mle}=1-\frac{t^{\hat{\alpha}_{mle}}}{\beta^{\hat{\alpha}_{mle}}} \qquad \ldots\ldots(8)$$

2–مقدر بيز Bayes estimator:

يعتمد مقدر بين على المعلومات الاولية حول المعلمة المقدرة وهذه المعلومات يتم صياغتها بشكل دالة رياضية،وتسمى دالة معلوماتية اولية informative prior اذا كانت هذه الدالة تخضع لتوزيع احتمالي وغير معلوماتية اذا كانت غير احتمالية وابسط طريقة للحصول على المعلومات الاولية هي باتباع طريقة Jeffery والتي تعتمد على معلومات فيشر. اذ ان

$$p(\alpha)\propto k\sqrt{I(\alpha)} \qquad \ldots\ldots(9)$$

اذ ان: k ثابت

$$I(\alpha)=-E\left[\frac{\partial^2\log L}{\partial\alpha^2}\right]$$

وباتباع هذا الاسلوب فان:

$$\frac{\partial^2\log L}{\partial\alpha^n}=\frac{-n}{\alpha^2}$$

$$I(\alpha)=-E\left[\frac{\partial^2\log L}{\partial\alpha^2}\right]=\frac{n}{\alpha^2} \qquad \ldots\ldots(10)$$

$$p(\alpha)=k\sqrt{I(\alpha)}=k\frac{\sqrt{n}}{\alpha} \qquad \ldots\ldots(11)$$

وباتباع صيغة بيز المعكوس للحصول على التوزيع اللاحق posterior distribution

$$h(\alpha,t)=\frac{L(\alpha)P(\alpha)}{\int_0^\infty L(\alpha)p(\alpha)d\alpha} \qquad \ldots\ldots(12)$$

$$L(\alpha).P(\alpha)d\alpha=\alpha^n\,\beta^{-n\alpha}\pi t_i^{\alpha-1}\,k\frac{\sqrt{n}}{\alpha}.d\alpha$$

$$\int_0^\infty L(\alpha).P(\alpha).d\alpha=\int_0^\alpha \alpha^{n-1}.\beta^{-n\alpha}\pi t_i^{\alpha-1}\,k\sqrt{n}\,.d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \alpha^{n-1} . e^{-\alpha \sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)} . \pi \frac{1}{ti} k\sqrt{n} . d\alpha$$

Let

$$\alpha \sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right) = Y \rightarrow \alpha = \frac{Y}{\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)} \rightarrow d\alpha = \frac{\partial y}{\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)}$$

$$= k\sqrt{n}\pi \frac{1}{ti} \int_0^\infty y^{n-1} \left[\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)\right]^{1-n} e^{-y} \frac{\partial y}{\left(\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)\right)}$$

$$= k\sqrt{n}\, \pi\, t_i^{-1} \frac{\Gamma n}{\left[\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)\right]^n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

اذ ن:

$$h(\alpha, t) = \frac{k\sqrt{n}\, \pi\, t_i^{-1}\, \alpha^{n-1}\, \beta^{-n\alpha}\, \pi\, t_i^{\alpha}}{k\sqrt{n}\, \pi\, t_i^{-1} \frac{\Gamma n}{\left[\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)\right]^n}}$$

$$= \frac{\left[\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)\right]^n \alpha^{n-1} e^{-\alpha \sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)}}{\Gamma n} \qquad ; \alpha > 0 \quad \ldots . (14)$$

$$\therefore \alpha \sim \text{Gamma} \left(\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right), n\right)$$

وبذلك وتحت دوال الخسارة المختلفة فان المقدر سيكون:

1- دالة الخسارة التربيعية المتماثلة squared Error Loss Function:

هي ابسط واشهر انواع دوال الخسارة وهي دالة خسارة متماثلة وتعطي اوزان متساوية للخطأ السالب والموجب. ومن ميزاتها بان المقدر البيزي لاي معلمة تحت دالة الخسارة التربيعية هو التوقع اللاحق لتلك المعلمة. اي

$$\hat{\alpha}_{squ} = \underset{post}{E} [\alpha]$$

$$\because \alpha \sim \text{Gamma} \left(\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right), n\right)$$

$$\therefore \hat{\alpha}_{squ} = \frac{n}{\sum \log\left(\frac{\beta}{ti}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

اما مقدر دالة المعولية فهو:

$$\hat{\alpha}_{squ} = \underset{post}{E} \left[\left(1 - \frac{t^\alpha}{\beta^\alpha}\right)\right]$$

$$E_{post}\left[1 - \frac{t^\alpha}{\beta^\alpha}\right] = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t^\alpha}{\beta^\alpha}\right) \frac{s^\alpha\, \alpha^{n-1}\, e^{-\alpha s}}{\Gamma n} d\alpha$$

اذ ان:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{\beta}{ti}\right)$$

$$E_{post}\left[1-\frac{t^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}\right]=1-\int_{0}^{\infty}\frac{s^{n}\,\alpha^{n-1}\,e^{-\alpha s}\,t^{\alpha}}{\Gamma n\,\beta^{\alpha}}d\alpha$$

$$=1-\frac{s^{n}}{\Gamma n}\int_{0}^{\infty}\alpha^{n-1}.e^{\alpha\log\left(\frac{t}{\beta}\right)}.e^{-\alpha s}.d\alpha$$

$$=1-\frac{s^{n}}{\Gamma n}\int_{0}^{\alpha}\alpha^{n-1}\,e^{-\alpha\left[s-\operatorname{los}\left(\frac{t}{\beta}\right)\right]}.d\alpha$$

let $\alpha\,[s-\log(t/\beta)]=y$

$$\to\alpha=\frac{y}{\left[s-\log\left(\frac{t}{\beta}\right)\right]}\ \to d\alpha=\frac{\partial y}{\left[s-\log\left(\frac{t}{\beta}\right)\right]}$$

$$E_{post}\left[1-\frac{t^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}\right]=1-\left[\frac{s}{s-\log(t/\beta)}\right]^{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(16)$$

2- دالة خسارة linex الغير متماثلة

استخدمت دالة الخسارة هذه لاول مرة سنة 1975 من قبل الباحث Vatian وهي خليط من دالة الخسارة الاسية والخطية حيث في بعض الحالات العملية تكون دالة الخسارة التربيعية المتماثلة غير واقعية،حيث اعطاء اهمية كبيرة للخطاء باتجاه معين اكبر من الاتجاه الاخر سيكون اكثر واقعية.وتعتبر دالة خسارة الاسية–الخطية (linex)من بين العديد من دوال الخسارة الغير متماثلة المشهورة التي استخدمت من قبل الباحثين وتاخذ الصيغة التالية:

$$L(\alpha,\hat{\alpha})=b\left[e^{a(\hat{\alpha}-\alpha)}-a(\widehat{\alpha-}\alpha)-1\right];a\neq0.b>0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

اذ ان

b: هي معلمة القياس لدالة الخسارة.

a: هي معلمة شكل دالة الخسارة.

ان $\hat{\alpha}$ هي تقدير لقيمة α ،وبذلك عندما $a>0$ فان خطاء التقدير باتجاه الاعلى سيكون اخطر من الخطاء باتجاه الاسفل والعكس صحيح،وعندما قيمة a تقترب من الصفر فان دالة خسارة linex هي تقريبا دالة الخسارة التربيعية وتعطي نفس الاوزن للخطاء.وبذلك فان الخطورة ستكون:

$$Risk=\ E_{post}[L(\hat{a},\alpha)]=E_{post}\left[b\left(e^{a(\hat{a},\alpha)}-a(\hat{a},\alpha)-1\right)\right]$$

$$=b\left[e^{a\hat{\alpha}}E_{post}(e^{-a\alpha})+aE_{post}(\alpha)-a\hat{\alpha}-1\right]$$

اذن

$$\frac{\partial Risk}{\partial \hat{\alpha}} = b\left[ae^{a\hat{\alpha}}E_{post}(e^{-a\propto}) - a\right]$$

$$\therefore \frac{\partial Risk}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^{\wedge}_{linex} = \frac{-1}{a}\log\left[E_{post}(e^{-a\alpha})\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (18)$$

$$\therefore \mathrm{E_{post}}[e^{-a\alpha}] = \int_0^\infty e^{-a\alpha}\frac{s^n\,\alpha^{n-1}\,.\,e^{-\propto s}}{\Gamma n}\,d\alpha = \left[\frac{s}{a+s}\right]^n$$

$$\therefore \; \alpha^{\wedge}_{linex} = \frac{n}{a}\log\left[\frac{s}{a+s}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots... (19)$$

وبذلك ستكون دالة المعولية:

$$E_{post}\left[e^{-a\left(1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right)}\right] = \int_0^\infty e^{-a(1-(t/\beta)^{\alpha})}.\frac{s^n\,\alpha^{n-1}\,e^{-\alpha s}}{\Gamma n}\,d\alpha$$

$$= e^{-a}\,\frac{s^n}{\Gamma n}\int_0^\infty \alpha^{n-1}e^{a(t/\beta)^{\alpha}}.e^{-\alpha s}\,d\alpha$$

$$= e^{-a}\,\frac{s^n}{\Gamma n}\int_0^\infty \alpha^{n-1}\sum_{j=-0}^{\infty}\frac{a^j}{j!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{j\alpha}.e^{-\propto s}\,d\alpha$$

$$= \frac{e^{-a}\,s^n}{\Gamma n}\sum_{0}^{\infty}\frac{a^j}{j!}\int_0^\alpha \alpha^{n-1}\;e^{j\alpha\log(t/\beta)}.\;e^{-\alpha s}\,d\alpha$$

$$= \frac{e^{-a}\,s^n}{\Gamma n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^j}{j!}.\frac{\sqrt{n}}{[s-j\log(t/\beta)]^n}$$

$$= e^{-a}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^j}{j!}\left[\frac{s}{s-j\log(t/\beta)}\right]^n$$

$$\therefore R^{\wedge}_{line\,X}(t) = \frac{-1}{a}\left[-a + \log\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{a^j}{j!}\left[\frac{s}{s-j\log(t/\beta)}\right]^n\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{a}\log\left[\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{a^j}{j!}\left(\frac{s}{s-j\log(t/\beta)}\right)^n\right] \ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots. (20)$$

3-دالة الخسارة الوقائية الغير متماثلة Precautionary loss function

استخدمت سنة (1996) من قبل الباحث Norstron كبديل لدالة الخسارة المتمثلة وهي تقترب الى اللانهاية بالقرب من نقطة الاصل لمنع حالة تحت التقدير underestimation وهي بذلك تعطي مقدر حصين خصوصاً في حالة كون تحت التقدير تؤدي الى نتائج خطيرة.

ودالة الخسارة الوقائية تاخذ الشكل التالي:

$$L(\hat{\alpha},\alpha)=C\,\frac{(\hat{\alpha}-\alpha)^2}{\hat{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

وبذلك فان دالة الخطورة ستكون:

$$Risk=E[L(\hat{\alpha}-\alpha)]=E\left[\frac{\hat{\alpha}^2-2\alpha\,\hat{\alpha}+\alpha^2}{\hat{\alpha}}\right]$$
$$=\hat{\alpha}-2E_{post}(\alpha)+\frac{1}{\hat{\alpha}}E_{post}[\alpha^2]$$
$$\therefore\ \frac{\partial Risk}{\partial\hat{\alpha}}=1-\frac{E_{post}(\hat{\alpha})}{\hat{\alpha}^2}$$
$$\to\ \frac{\partial\, Risk}{\partial\,\hat{\alpha}}=0\quad\Rightarrow\quad \hat{\alpha}_{pre}=\sqrt{E_{post}(\alpha^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

وبذلك فان مقدر المعلمة α سيكون

$$E_{post}[\alpha^2]=\int_0^\infty \alpha^2\,\frac{s^n\,\alpha^{n-1}\,.e^{-\alpha s}}{\Gamma n}\,d\alpha$$
$$=\frac{s^n}{\Gamma n}\int_0^\infty \alpha^{n+1}\,e^{-\alpha s}\,\alpha=\frac{n(n+1)}{s^2}$$
$$\therefore\ \hat{\alpha}_{pre}=\frac{\sqrt{n(n+1)}}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

اما مقدر دالة المعولية سيكون

$$\hat{R}_{pre}(t)=\sqrt{E_{post}(1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha})^2}$$
$$\therefore\ E_{post}\left[\left(1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2\right]=E_{post}\left[1-2\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}+\left(\frac{t}{\beta}\right)^{2\alpha}\right]$$
$$=1-2\,E_{post}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}+E_{post}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{2\alpha}$$
$$\therefore\ E_{post}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right]=\int_0^\infty\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}.\frac{s^n\,\alpha^{n-1}.\,e^{-\alpha s}}{\Gamma n}\,d\alpha$$
$$=\frac{s^n}{\Gamma n}\int_0^\infty \alpha^{n-1}\,.\,e^{-\alpha(s-\log(t/\beta))}d\alpha$$
$$=\left[\frac{s}{s-\log(t/\beta)}\right]^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$
$$\therefore\ E_{post}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{2\alpha}\right]=\int_0^\infty\left(\frac{t}{\beta}\right)^{2\alpha}\frac{s^n\,e^{-\alpha s}\,\alpha^{n-1}}{\Gamma n}\,d\alpha$$
$$=\left[\frac{s}{s-2\log(t/\beta)}\right]^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$
$$\hat{R}_{pre}(t)=\sqrt{1-2\left[\frac{s}{s-\log(t/\beta)}\right]^n+\left[\frac{s}{s-2\log(t/\beta)}\right]^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

4- دالة الخسارة اللوغاريتمية الغير متماثلة Logarithmic loss Function

استخدمت دالة الخسارة هذه من قبل الباحث Brown عام 1968 وتاخذ الصيغة التالية:

$$L(\hat{\alpha},\alpha) = \left[\log\left(\frac{\hat{\alpha}}{\propto}\right)\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (27)$$

وبذلك فان دالة الخطورة ستكون:

$$Risk = E_{post}\,[L(\alpha^{\wedge},\alpha)] = E_{post}\,[(\log(\alpha^{\wedge}) - \log(\alpha))^2]$$
$$= log^2(\alpha^{\wedge}) - 2log(\alpha^{\wedge})E_{post}\,[\log(\alpha)] + E_{post}[log^2(\alpha)]$$
$$\therefore\ \frac{\partial\, Risk}{\partial\alpha^{\wedge}} = 2\ \log(\alpha^{\wedge})\ \frac{1}{\alpha^{\wedge}} - 2E_{post}[\log(\alpha)]$$
$$\therefore\ \frac{\partial Risk}{\partial\alpha^{\wedge}} = 0\ \Rightarrow\ \alpha^{\wedge}_{log} = e^{E_{post}(\log(\alpha))} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

اذن:

$$A = E_{post}(\log(\alpha)) = \int_0^{\infty} \log(\alpha)\frac{s^n\, e^{-\propto s}\ \propto^{n-1}}{\Gamma n}\, d\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (29)$$

ومن خلال استخدام الاساليب العددية لايجاد التكامل السابق فان مقدر المعلمة α باستخدام دالة الخسارة اللوغاريتمية سيكون

$$\alpha^{\wedge}_{log} = e^{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (30)$$

اما مقدر دالة المعولية سيكون:

$$R^{\wedge}_{log}\,(t) = e^{E_{post}\left(\log\left(1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\propto}\right)\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

$$B(t) = E_{post}\left[\log\left(1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right)\right] = \int_0^{\infty} \log\left(1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right) .\frac{s^n\, e^{-\alpha s}\, \alpha^{n-1}}{\Gamma n}\, d\alpha$$

ومن خلال استخدام الاساليب العددية لايجاد التكامل السابق ولكل قيمة من قيم t مقدر دالة المعولية باستخدام دالة الخسارة اللوغاريتمية سيكون:

$$R^{\wedge}_{log}(t) = e^{B(t)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \ldots (32)$$

الجانب التجريبي:

تم إجراء الدراسة باستخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبياً، حيث تمت الدراسة بالاعتماد على أحجام عينات صغيرة(10)، متوسطة(15, 25) وكبيرة (50, 75). وقيم مختلفة أيضاً لمعلمات التوزيع الحقيقية وهي موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (1) يوضح القيم المختلفة للمعلمات المستخدمة في الدراسة

الحالات	I	II	III	IV
α	0.5	1	1.5	2
β	1	1.5	2	2.5
a	1	2	3	4

ولغرض الوصول للمقدر الأفضل فقد تم الاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطاء(MSE) كأساس للمقارنة والذي يأخذ الصيغة التالية:

$$MSE(R^{\wedge}(t)) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R^{\wedge}(t_i) - R(t_i))^2}{N} \quad \text{.......................(33)}$$

ولحجم مكرر(L=1000) وبالاعتماد على البرنامج المرفق في الملحق رقم (1) والذي تم كتابته باستخدام تطبيق MATLAB–R2014a الحديث، فان جدول رقم (2)و(3) يبين نتائج هذه الدراسة.

الاستنتاجات:

من جدول رقم (3) يتبين الأتي:

1- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة بيز المعتمدة على دالة الخسارة اللوغاريتمية الغير متماثلة هي أفضل طريقة لأنها حققت اعلى نسبة افضلية 39% من مجمل الحالات المستخدمة .
2- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة بيز المعتمدة على دالة خسارة linex الغير متماثلة هي ثاني أفضل طريقة لأنها حققت اعلى نسبة افضلية 29% من مجمل الحالات المستخدمة .
3- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة الامكان الاعظم قد احرزت المرتبة الثالثة بنسبة 21% ثم يليها طريقة بيز المعتمدة على دالة خسارة الوقائيى بنسبة 10% واخيرا طريقة بيز المعتمدة على دالة الخسارة التربيعية المتماثلة بنسبة 1% .
4- نلاحظ تناقص قيم متوسط مربعات الخطاء بزيادة حجم العينة ،وهذا يبين اتفاق الجانب النظري والتجريبي مع النظرية الاحصائية الخاصة بسلوك هذا المؤشر.
5- نلاحظ افضلية مقدرات بيز المعتمدة على دوال الخسارة الغير متماثلة على تلك المعتمدة على دوال الخسارة المتماثلة.

التوصيات:

1- يوصي الباحث باعتماد مقدرات طريقة بيز المعتمدة على دالة الخسارة اللوغاريتمية في الحالات التي تستوجب تقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوة .
2- يوصي الباحث بإجراء الدراسة السابقة في حالة كون معلمة القياس مجهولة ،البيانات المفقودة ، حالة البيانات تحت المراقبة وفي حالة توفر معلومات اولية اخرى حول دالة المعولية وبشكل مفصل .

جدول رقم (2) :يوضح قيم متوسط مربعات الخطا لدالة المعولية ولقيم مختلفة من المعلمات

parameters	sample size	Mle	Quadratic	precautionary	Linex	Logarithmic	الافضل
elpha=0.5	10	0.002903834	0.002563642	0.002784921	0.002475431	0.002563642	Linex
	15	0.001198488	0.001170281	0.0011584	0.001179567	0.001170281	Precautionary
beta=1	25	0.001364571	0.001320734	0.001341604	0.001310049	0.001320734	Linex
	50	0.000685879	0.000639839	0.000692398	0.000618683	0.000639839	Linex
a=1	75	0.00067863	0.000605914	0.000678902	0.000605085	0.000624257	Linex
elpha=1	10	0.006315279	0.005935276	0.005860492	0.005998112	0.006209892	Precautionary
	15	0.001839582	0.001131352	0.00155744	0.00094147	0.000770231	Logarithmic
beta=1	25	0.001683298	0.001788117	0.001407022	0.000845258	0.000690883	Logarithmic
	50	0.001338265	0.001259635	0.001297374	0.000124126	0.000122911	Logarithmic
a=1	75	0.001386802	0.001148359	0.001140368	0.000152527	0.000135701	Logarithmic
elpha=1.5	10	0.013113208	0.016152397	0.013974658	0.017351317	0.01869519	Precautionary
	15	0.002124048	0.001620612	0.001834995	0.001531007	0.00146847	Logarithmic
beta=1	25	0.003117524	0.002701907	0.002869411	0.002614149	0.002554676	Logarithmic
	50	0.001244029	0.00120425	0.001214777	0.001200402	0.001200203	Logarithmic
a=1	75	0.0011757	0.001171825	0.001273302	0.001070942	0.001170369	Linex
elpha=2	10	0.01437833	0.012021042	0.012621528	0.011627584	0.011629692	Logarithmic
	15	0.01025662	0.009788005	0.00976006	0.009784881	0.009879309	Linex
beta=1	25	0.004655939	0.004643483	0.004583275	0.004677251	0.004727992	Precautionary
	50	0.003148811	0.003411094	0.003269705	0.003492267	0.003560868	Mle
a=1	75	0.000938474	0.000899014	0.000912368	0.000891853	0.000888317	Logarithmic
elpha=0.5	10	0.006361692	0.005398232	0.00600954	0.005123508	0.004913363	Logarithmic
	15	0.008035973	0.007245095	0.007701169	0.007016736	0.006841602	Logarithmic
beta=2	25	0.003182517	0.002977228	0.003106559	0.002915823	0.002871488	Logarithmic
	50	0.002504566	0.002328321	0.002483005	0.002258088	0.002178548	Logarithmic
a=1	75	0.001210075	0.001208181	0.001196037	0.001212257	0.00122515	Precautionary
elpha=1	10	0.011168706	0.008210651	0.009623549	0.007474513	0.006842476	Logarithmic
	15	0.004386252	0.004067298	0.004141532	0.00404088	0.004063474	Linex
beta=2	25	0.000885421	0.001216651	0.000995247	0.001343243	0.001472843	Mle
	50	0.000678661	0.000588096	0.000639197	0.000563817	0.000542899	Logarithmic
a=1	75	0.000174147	0.000233013	0.000195669	0.000254728	0.000275595	Mle
elpha=1.5	10	0.009480145	0.006747367	0.007873825	0.006137239	0.005659828	Logarithmic
	15	0.002273996	0.001733923	0.00197111	0.001628229	0.001547615	Logarithmic
beta=2	25	0.00274424	0.002215954	0.002451298	0.00209115	0.001994963	Logarithmic
	50	0.002472483	0.00272498	0.002577797	0.002806434	0.002880637	Mle
a=1	75	0.000881632	0.000967241	0.000918697	0.000995451	0.001020558	Mle
elpha=2	10	0.001331095	0.000769484	0.001014554	0.000692558	0.000631469	Logarithmic
	15	0.004178622	0.003921041	0.003962228	0.003914533	0.003934952	Logarithmic
beta=2	25	0.000611626	0.000369576	0.000477791	0.000317575	0.000277273	Logarithmic
	50	0.000905121	0.000796167	0.000841334	0.000772244	0.000755076	Logarithmic
a=1	75	0.000805121	0.000696167	0.000741334	0.000672244	0.000655076	Logarithmic

elpha=0.5	10	0.010412734	0.008461375	0.010188199	0.006989973	0.006817832	Logarithmic
	15	0.003417941	0.003143281	0.003351149	0.002970265	0.003007392	Linex
beta=1	25	0.000651577	0.000772303	0.000590859	0.000924885	0.000986629	Precautionary
	50	0.000560048	0.000512536	0.000569808	0.000469867	0.000462201	Logarithmic
a=2	75	6.09664E-05	5.85349E-05	6.19958E-05	5.84961E-05	5.88932E-05	Logarithmic
elpha=1	10	0.006912986	0.005331896	0.006055422	0.004685663	0.004742986	Linex
	15	0.005753883	0.004808681	0.005247345	0.004395067	0.004432026	Linex
beta=1	25	0.0066565	0.006466205	0.006439189	0.006483275	0.00652453	Linex
	50	0.001446836	0.001631199	0.001487777	0.001784085	0.001784894	Mle
a=2	75	0.000912374	0.000926025	0.00090942	0.000945083	0.000946309	Precautionary
elpha=1.5	10	0.006297111	0.007368999	0.006541471	0.008442254	0.008443862	Mle
	15	0.014776548	0.012724241	0.01342163	0.011894694	0.012051209	Linex
beta=1	25	0.006651947	0.005993389	0.006226735	0.005729288	0.00577707	Linex
	50	0.007081609	0.0066924	0.006835756	0.006522094	0.006552693	Linex
a=2	75	0.000328103	0.000352051	0.000337999	0.000373699	0.000370989	Mle
elpha=2	10	0.010263017	0.007150903	0.008252043	0.005852049	0.006121036	Linex
	15	0.004441111	0.004236263	0.004230231	0.004288478	0.004304613	Logarithmic
beta=1	25	0.000918653	0.001372919	0.001156219	0.001658508	0.001621299	Mle
	50	0.000662358	0.000559911	0.000602272	0.000516416	0.00052231	Logarithmic
a=2	75	0.000128535	0.000143075	0.000136387	0.000155318	0.000153011	Mle
elpha=0.5	10	0.001050416	0.000801056	0.001019372	0.000759267	0.000737414	Logarithmic
	15	0.001405452	0.001395143	0.001360409	0.001524603	0.00150446	Precautionary
beta=3	25	0.002289528	0.002161308	0.002233203	0.002078242	0.002113708	Linex
	50	0.000845671	0.00080924	0.000835765	0.000779581	0.000789009	Logarithmic
a=3	75	0.000745671	0.00070924	0.000735765	0.000679581	0.000689009	Logarithmic
elpha=1	10	0.012509557	0.009949337	0.011051832	0.008276012	0.008908432	Linex
	15	0.001669462	0.001087861	0.001414271	0.000710669	0.000816025	Linex
beta=3	25	0.000410233	0.000606247	0.000482317	0.000859022	0.000760523	Mle
	50	0.000371827	0.000394756	0.000378483	0.000433736	0.000417779	Mle
a=3	75	0.000171827	0.000194756	0.000178483	0.000233736	0.000217779	Mle
elpha=1.5	10	0.009632894	0.006885307	0.008014656	0.005102552	0.005787647	Linex
	15	0.004005773	0.00378792	0.003813575	0.003845334	0.003822387	Quadratic
beta=3	25	0.000820582	0.001190361	0.00099238	0.001575932	0.001418189	Mle
	50	0.000605923	0.000517585	0.000559283	0.00045975	0.000480655	Linex
a=3	75	0.000159962	0.000224102	0.000191241	0.000288451	0.000261333	Mle
elpha=2	10	0.007996117	0.00560143	0.006512754	0.004143727	0.004780931	Linex
	15	0.001934284	0.001463515	0.001653137	0.001251184	0.001315729	Linex
beta=3	25	0.002344367	0.001873371	0.002065329	0.001573511	0.001692892	Linex
	50	0.002185641	0.002429657	0.002302781	0.002653381	0.002563711	Mle
a=3	75	0.000185641	0.001429657	0.001902781	0.001653381	0.002363711	Mle

جدول رقم (3):يوضح نسبة تكرار كل طريقة

نسبة الافضلية	التكرار	الطريقة
%21	17	Mle
%1	1	Quadratic
%10	8	precautionary
%29	23	Linex
%39	31	Logarithmic
100	80	Total

المصادر

1- H. J. Malik, "Exact moments of order statistics for a power function distribution", Skandinavisk aktuarietiidskrift, vol. 50, (1967), pp. 64-69.

2- K. Kapadia, "Sample size required to estimate a parameter in the Power function distribution", Madrid, vol. 29, (1978).

3- M. Ahsanullah, "Estimation of the location and scale parameters of a Power function distribution by linear functions of order statistics", Communications in Statistics, vol. 5, (1974), pp. 463-467.

4-Meeker,Q.W and Escobar A.L.(1998).Statistical Methods for Reliability Data.John-Wily&Sons.Inc.

5- Meniconi, "The power function distribution: A useful and simple distribution to asses' electrical component reliability", Microelectron.Reliab, vol. 36, no. 9, (1995), pp. 1207-1212 .

6- Norstrom,J. G.(1996). The use of precautionary loss functions in risk analysis, 6 IEEE Trans. Reliab. 45(1996), pp. 400-403.

7-Saiful-Islam A. F. M.(2011).Loss Functions,Utility Functions and Bayesian Sample Size Determination. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in Queen Mary, University of London.

8- Soliman,A.A.(2000). Comparison of Linex and Quadratic Bayes estimators for the Rayleigh Distribution.Commun.Statis.Theory Meth. 29(1): 95-107.

9-. Munawar and M. Farooq, "Bayesian parameters estimation of hybrid censored power function distribution under different loss functions", 9th International Conference on Statistical Sciences Lahore, Pakistan. vol. 22, (2012), pp. 331-340.

10-S. Zarrin, S. Saxena and K. Mustafa, "Reliability computation and Bayesian Analysis of system reliability of Power function distribution", International Journal of Advance in Engineering, Science and Technology, vol. 2, no. 4, (2013), pp. 76-86.

11-P. R. Rider, “Distribution of the product, quotient of maximum values in samples from a power function population”, Journal of the American Statistical Association, vol. 59, (1964), pp. 877-880.

12- Varian, H. R. (1975). A Bayesian Approach to Reliability Real Estate Assessment. Amsterdam, North Holland, 195-208.

13- Zellner, A.(1986). Bayesian Estimation and Prediction using Asymmetric Loss Functions, Jour. Amer. Statist. Assoc. 81: 446-451.

14- Zaka A.,Feroze N. and Akhter A.S..A Note on Modified Estimators for the Parameters of the Power Function Distribution.International Journal of Advanced Science and Technology, Vol.59, (2013), pp.71-84

الملاحق - البرنامج

```
%%%%%%% Reliability of power Law Distribution Program %%%%%%%%%%
clear all
clc
n=10;
elpha=2;
beta=3;
a=3;
for q=1:1000
u=rand(1,n);
x=exp(log(beta)+(1/elpha).*log(u));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
emle(q)=n/sum(log(beta./x));
ebq(q)=n/sum(log(beta./x));
S(q)=sum(log(beta./x));
elin(q)=(n/a)*log((a/S(q))+1) ;
epre(q)=sqrt(n*(n+1))/S(q) ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t=0.25:0.25:(beta-0.25);
Rreal(q,: )=1-((t.^elpha)./(beta^elpha));
Rmle(q,: )=(1-(t.^emle(q))./(beta^emle(q)));
Rbq(q,: )=1-(S(q)./(S(q)-log(t./beta))).^n;
Rpre(q,: )=(1-2*(S(q)./(S(q)-log(t./beta))).^n+(S(q)./(S(q)-2*log(t./beta))).^n).^(0.5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
j1=0:20;
for i1=1:size(t,2);
for j2=1:size(j1,2)
s1(i1,j2)=((a.^j1(j2))/factorial(j1(j2)))*(S(q)/(S(q)-j1(j2)*log(t(i1)/beta)))^n;
end
end
for i2=1:size(t,2);
Rlin(i2)=1-(1/a)*log(sum( s1(i2,:)   ));
end
Rlinex(q,: )=Rlin;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i3=1:size(t,2)
  syms o
   Rro(i3)= ((S(q)^n)/gamma(n))*int( (log(1-(t(i3)/beta)^o))*(o^(n-1))*exp(-
S(q)*o),0,6);
 end
Rlog(q,:)=exp(double(Rro));
end
MSE=[mean(mean((Rreal'-Rmle').^2)) mean(mean((Rreal'-Rbq').^2))
mean(mean((Rreal'-Rpre').^2)) mean(mean((Rreal'-Rlinex').^2)) mean(mean((Rreal'-
Rlog').^2))]
```