دراسة مقارنة لطرق التكامل العددي المحدود باستخدام برنامج MATLAB

م. م. كمال حميد الطائي

ملخص البحث :

يتلخص موضوع البحث في إعطاء فكرة أولية عن التحليل العددي والتكامل العددي بالخصوص ، ومن ثم اخذ ثلاثة أمثلة للتكامل المحدود ، الاولى لدالة أسية ، والثانية لدالة مثلثية والثالثة لدالة كسرية . تم حساب قيم هذه التكاملات بالطريقة الرياضية المباشرة ، حيث تمثل القيم المستخرجة القيم الحقيقية او الدقيقة لهذه التكاملات والتي تمثل ايضاً مقدار المساحة المحصورة بين المنحني للدالة تحت التكامل ومحور السينات ضمن الفترة التي تمثل حدود التكامل . بعدها تم حساب قيم هذه التكاملات المحدودة باستخدام أربعة طرق للتكامل العددي وهي :

١- طريقة شبه المنحرف (Trapezium or Trapezoidal Rule) .

٢- طريقة سمبسون (Simpson's Rule) .

٣- طريقة النقطة الوسطى (Midpoint Rule) .

٤- طريقة رومبيرج (Romberg Method) .

تم حساب قيمة الخطأ النسبي لكل طريقة وللامثلة الثلاثة المذكورة أعلاه ، وذلك لغرض دراسة النتائج ومقارنتها مع بعضها . حيث استخدم البرنامج الرياضي (MATLAB) في حساب النتائج الرياضية اينما دعت الضرورة لها مقربة الى أربعة مراتب عشرية بعد الفارزة من خلال كتابة وتنفيذ البرامج التي كتبت بلغة البرمجة هذه.

ثم دونت النتائج على شكل جدول لتسهيل عملية المقارنة . حيث وجدت ان طريقة رومبيرج هي الافضل في حساب القيم التقريبية التي كانت أقرب مايمكن من النتائج الدقيقة المحسوبة مسبقاً . بعدها تأتي طريقة سمبسون من حيث قرب القيم التقريبية عن الحقيقية .

تم دراسة تأثير زيادة عدد الشرائح المأخوذة ولطريقة واحدة كمثال وهي طريقة سمبسون على دقة النتائج . ووجد ان القيم التقريبية المحسوبة بهذه الطريقة تقترب أكثر من القيم الحقيقية لنفس التكامل المحدود كلما زاد عدد الشرائح المأخوذة .

Abstract:

This paper view the primal idea about the numerical integration and numerical analysis. We take three limited integrals for example, the first is exponential function, the second is trigonometric function, and the last function is fraction. This functions were solved by the direct method using the integrations rules, so, the results which we obtained represents the exact values for these integrals, which represents the area under the curve of these functions and x-axis too. Then we solved these integrals using four numerical methods:

1- **Trapezoidal rule.**
2- **Simpson's rule.**
3- **Midpoint rule.**
4- **Romberg rule.**

We calculate the relative errors for these examples in order to make a comparison between the results using direct and numerical methods. We use here the MATLAB programs in numerical methods for each rule. When we write the results in a table, we found that the Romberg rule give us a good result approach to exact. Then we study the effect of layers increasing on the accuracy of the results, and we found that the value of the integrals is approached more to the exact value with the layers increasing.

الجزء النظري

المبحث الأول

التحليل والتكامل العددي

Numerical Analysis & Numerical Integration

التحليل العددي(Numerical Analysis)[١٢] أو الرياضيات العددية ، وهو أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الخوارزميات لحل بعض المشاكل الرياضية باستخدام عمليات رياضية بسيطة مثل الجمع والضرب ، حيث تنشأ هذه المشاكل التي يحلها التحليل العددي في دراسة التحليل الرياضي أو من دراسة المتغيرات الحقيقية أو المتغيرة ، أو الجبر الخطي العددي ضمن حقول الأعداد الحقيقية والمركبة .

ان العديد من المسائل في الرياضيات لاتمتلك حلاً مباشراً بالطرق الاعتيادية المعروفة في علم الرياضيات Closed Form Solution (أي بمعنى آخر لا توجد طريقة أو قاعدة مباشرة تعطينا الحل الدقيق أو الصحيح) . لذلك يتوجب علينا اما محاولة إيجاد حل تقريبي أو البحث عن حل عددي numerical solution. وان عملية إيجاد الحل العددي هي مجال بحث التحليل العددي.

الطرق المباشرة والتكرارية (Iterative & direct methods) :

يمكن لبعض المسائل في التحليل العددي أن تحل بشكل دقيق عن طريق خوارزمية ما ، حيث تسمى هذا النوع من الخوارزميات بـ "الطرق المباشرة" ، ومثال على ذلك الاختصار باستخدام طريقة كاوس Gaussian elimination لحل نظام من المعادلات الخطية والطريقة المبسطة Simplex method أيضاً المستخدمة في حل مثل هذا النظام خاصة في مجال بحوث العمليات .

لكن بالمقابل ، هناك الكثير من المسائل لا تحل بخوارزميات مباشرة ، لذا وفي هذه الحالة قد يكون من الممكن حلها باستخدام احدى الطرق التكرارية ، والتي تبدأ بتخمين وإيجاد التقريب الأفضل الذي يقترب بفعالية من الحل المطلوب . حتى في حالة وجود

خوارزميات مباشرة في بعض الاحيان فقد تفضل الطرق التكرارية لأنها أكثر فعالية وقد تتطلب زمنا أقل وقدرة حسابية أقل إضافة لتقريب جيد للحل .

التكامل العددي (Numerical Integration)

هنالك مسائل رياضية عديدة يمكننا ايجاد الحلول المضبوطة لها بسهولة كايجاد جذري المعادلة التالية ($x^2 - 3x + 2 = 0$) والتي يمكن حلها بطريقة التجربة ، حيث ستكون جذورها او مجموعة حلولها تساوي ($x=1$, $x=2$) وكذلك حساب التكامل التالي [١٣] :

$$\int_0^3 3x^2\,dx = (x^3]_0^3 = 27 - 0 = 27$$

لكن في الغالب ليس من السهل ايجاد الحلول المضبوطة للعديد من المسائل والمعادلات الجبرية ذات القوى غير الصحيحة ، او بعض المعادلات غير الخطية مثل المعادلة التالية :

$$\sin x = x$$

وفي الحياة العملية ليس من الضروري اعتماد القيم المضبوطة دائماً لحل مسألة رياضية ، بل يمكن الاستعانة بقيم تقريبية ، كما في عملية حساب مساحة او محيط دائرة عندما نستخدم النسبة الثابتة (π) بقيمتها التقريبية والتي تساوي (3.14) ، وهي قيمة مقربة للكسر الاعتيادي 22/7 .

ان وسائل ايجاد هذه الحلول التقريبية تسمى بالخوارزميات ومعظم هذه الخوارزميات المصممة لحل مسائل معينة تسمح لنا بايجاد الحل باية دقة مطلوبة باستخدام عدد محدود من الخطوات تسمى بالحلول العددية (**Numerical solutions**) ، اما الموضوع المتعلق بدراسة هذه الحلول والنظريات المتعلقة بها فيسمى بالتحليل العددي (**Numerical analysis**) . وبما ان الحل العددي لمسألة ما يكون عادة قيمة تقريبية للحل المضبوط لذا ستكون هذه القيمة تحتوي على اخطاء من المهم قياسها .

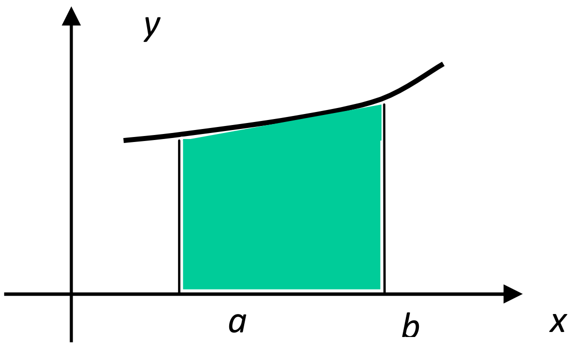
المبحث الثاني

بعض الطرق العددية في حساب التكامل المحدود

Some of Numerical methods in finite Integrals)
(calculation

نعلم أن المساحة تحت المنحني والمحصورة بين قيمتي المتغير السيني ($X_1=a$, $X_2=b$) تحسب من ناتج التكامل المحدود الآتي [١] :

$$\textbf{Area} = \int_a^b y\,dx$$



شكل رقم (١)

المساحة تحت المنحني

حيث يمكننا حساب المساحة تحت المنحني بالشكل أعلاه باستخدام الطرق العددية باتباع الخطوات التالية :

١- تقسيم المساحة المطلوب حسابها الى عدة شرائح عمودية (Vertical Strips) .
٢- حساب مساحة كل جزء او شريحة .
٣- جمع المساحات المستخرجة لنحصل على الناتج الذي يمثل قيمة المساحة الكلية .

ومن هذه الطرق مايلي :

١- طريقة شبه المنحرف (Trapezium or Trapezoidal Rule) .
٢- طريقة سمبسون (Simpson's Rule) .
٣- طريقة النقطة الوسطى (Midpoint Rule) .
٤- طريقة رومبيرج (Romberg Method) .

أولاً - طريقة شبه المنحرف [٤] :

في هـــذه الطريقـــة يتـــم تقسيـــم المساحة تحـــت المنحني الى شرائـح عمـودية متساويـة العـرض (n vertical strips of equal width w) وليكن عددها يساوي (n) ، وعرض الشريحة الواحدة يساوي (w) ، حيث :

$$w = \frac{b - a}{n}$$

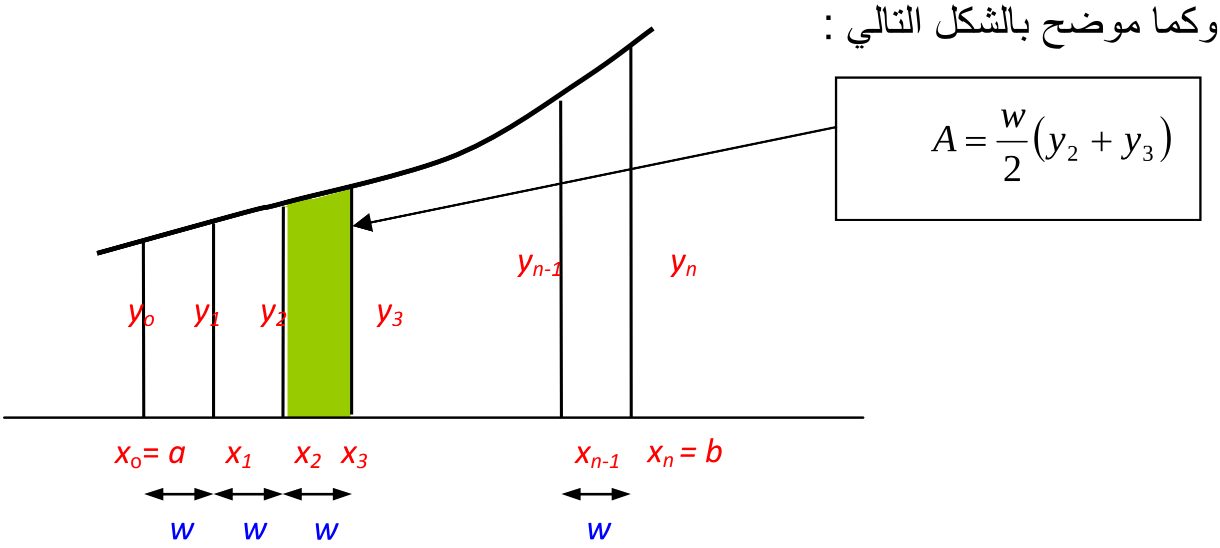
عندها ستكون كل شريحة أشبه بشبه المنحرف ، حيث من الممكن حساب مساحة هذا الشكل التقريبية ، وقلنا تقريبية لأن الشكل ليس شبه منحرف تماماً بل يشبهه ، وذلك لأن حده الأعلى هو خط منحني والذي يمثل جزء من منحنى الدالة المراد ايجاد المساحة تحتها . فعلى سبيل المثال ، ان مساحة الشريحة الاولى تساوي :

$$A = \frac{w}{2}(y_o + y_1)$$

ومساحة الشريحة الثانية تساوي : $A = \frac{w}{2}(y_1 + y_2)$

وللثالثة تساوي : $A = \frac{w}{2}(y_2 + y_3)$

وكما موضح بالشكل التالي :



شكل رقم (٢)
الشرائح العمودية تحت المنحني

والآن بامكاننا حساب المساحة التقريبية تحت المنحني وذلك من مجموع المساحات للشرائح العمودية الموضحة بالشكل أعلاه وكما يلي :

$$\int_a^b ydx = \frac{w}{2}(y_o + y_1) + \frac{w}{2}(y_1 + y_2) + \frac{w}{2}(y_2 + y_3) + \ldots + \frac{w}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

وعند إجراء التبسيط لهذه المعادلة سيكون :

$$\int_a^b ydx = \frac{w}{2}(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{b-a}{2n}(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

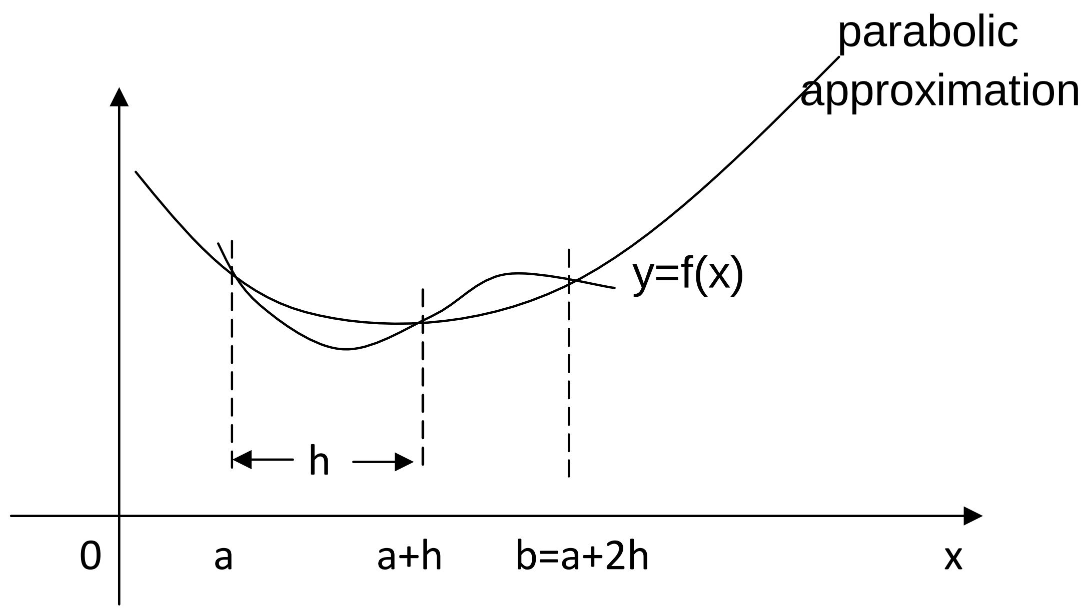
ثانياً - طريقة سمبسون (Simpson's Method) [٢] :

في هذه الطريقة أيضاً يتم تقسيم المساحة تحت المنحني الى شرائح عمودية متساوية العرض (2*n* vertical strips of equal width *w*) وليكن عددها يساوي (n) ، وعرض الشريحة الواحدة يساوي (*w*) ، حيث : $w = \frac{b-a}{2n}$

وعليه ستكون كل شريحة عبارة عن شريحتين عموديتين متساويتين وكل شريحة من هاتين الشريحتين أشبه بشبه المنحرف ، حيث من الممكن حساب مساحتها التقريبية ، وقلنا تقريبية لأن الشكل ليس شبه منحرف تماماً بل أشبه بذلك ، وذلك لأن حده الأعلى هو خط منحني اما محدب او مقعر والذي أيضاً يمثل جزء من منحني الدالة المراد ايجاد المساحة تحتها . وسيكون منحني الدالة يمر بثلاث نقاط ضمن الشريحة الاصلية وهي :

(a,f(a)) , (a+h , f(a+h)) and (a+2h , f(a+2h))

حيث تمثل القيمة (h) عرض احدى الشريحتين ، وكما بالشكل التالي :



شكل رقم (3)

الشرائح العمودية تحت المنحني

وبعد اشتقاق المعادلة الخاصة بهذه الطريقة ستكون بالشكل التالي :

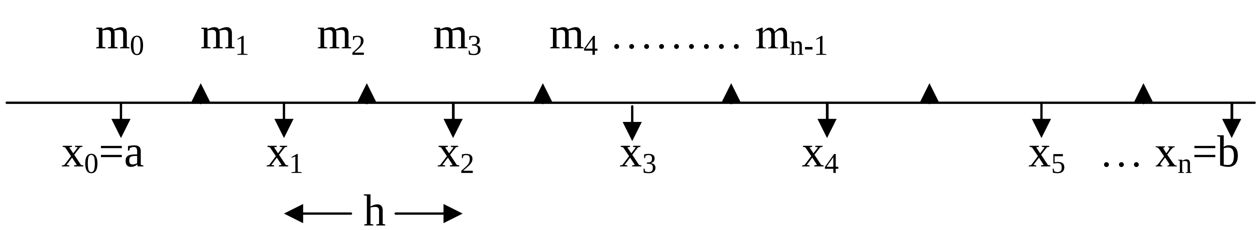
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$(1/3)h[\, f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \ldots\ldots +2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ثالثاً - طريقة النقطة الوسطى (Midpoint Method) [١] :

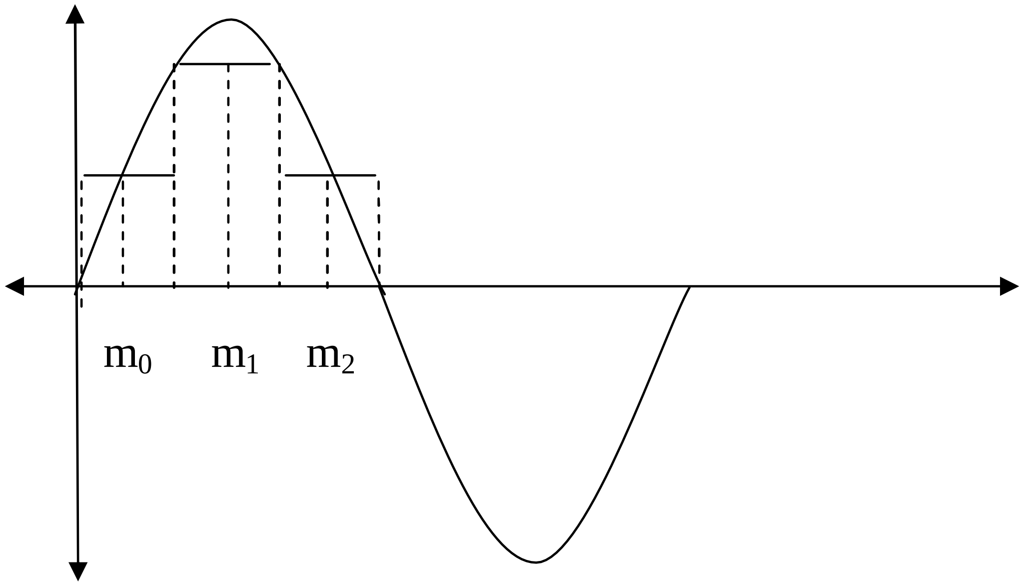
لنفرض انه لدينا الدالة التالية ($f(x)=\sin x$) والمطلوب حساب المساحة المحصورة بين منحني هذه الدالة ومحور السينات للفترة المحصورة بين ($a=0$, $b=\pi$) . وكما موضح في الشكل رقم (4) . عندها سيتم تقسيم الفترة المطلوبة الى عدة أجزاء أو بمعنى آخر تقسيم المساحة تحت المنحني الى شرائح عمودية متساوية العرض .

$a=0$, $b=\pi$



$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \quad m_0 = a + \tfrac{1}{2} h \ , \ m_1 = a + (3/2)\, h \ , \ m_2 = a + (5/2)\, h$$

$$m_n = a + (n+1/2)h$$



شكل رقم (٤)

المساحة تحت منحني موجة الجيب مقسمة الى شرائح عمودية

ولحساب المساحة الكلية المحصورة بين منحني الدالة الجيبية ومحور السينات علينا ايجاد حاصل جمع مساحات المستطيلات المرسومة تحت المنحني وهي تمثل القيمة التقريبية للمساحة الحقيقية ، علماً انه كلما زاد عدد الشرائح كانت المساحة أقرب الى الحقيقية أو أكثر دقة.

$$A = hf(m_0) + hf(m_1) + hf(m_2) + hf(m_3) + \ldots\ldots\ldots + hf(m_{n-1}) \quad \text{or :}$$

$$A = h \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$$

اما القيمة الحقيقية للتكامل او للمساحة تحت المنحني فتحسب من قيمة التكامل المحدود للدالة المعطاة ضمن الفترة المحددة فيه وكما يلي:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

رابعاً – طريقة رومبيرج (Romberg Method) [٦] :

لتكن f(x) دالة معرفة على الفترة المغلقة [a , b] ، ولتكن هذه الفترة مقسمة الى الاجزاء التالية :

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots x_n=b$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} & h & & h & & h & & & & h & & h \\ |\_\_\_\_\_\_ & & | \_\_\_\_\_\_ & & | \_\_\_\_\_\_ & & | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & & |\_\_\_\_\_\_ & & |\_\_\_\_\_\_ & | \\ a=x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_{n-2} & & x_{n-1} & x_n=b \end{array}$$

$x_1 = a + h$

$x_2 = a + 2h$

$x_3 = a + 3h$

.   .

.   .

$x_{n-1} = a +(n-1)h$

$x_n = a + nh = b$

ولنتذكر قاعدة شبه المنحرف للدالة هذه ضمن الفترة المعطاة ، وعليه سيكون :

$$T(f;P) = (h/2)\ \{f(a) + 2f(a+h) +2f(a+2h) + \ \ldots\ + 2f(a+(n-1)h) + f(b)\}$$

$$= (h/2)\{f(a)+f(b)\} + h\{f(a+h) + f(a+2h) + \ \ldots\ + f(a+(n-1)h)\}$$

$$= (h/2)\{f(a)+f(b)\} + h\ Sum[f(a+i*h)], \quad \text{where } 1 <= i <= n-1$$

ولنفرض ان عدد الشرائح يساوي 2^n ، عليه ستكون الصيغة الرياضية أعلاه بالشكل التالي :

$$R(n+1,1) = (h/2)\{f(a)+f(b)\} + h\ Sum[f(a+i*h)], \qquad --- \quad (1)$$

where $1 <= i <= 2^n-1$

لاحظ هنا ان قيمة (h) تتغير مع تغير قيمة (n) وفق المعادلة التالية :

$h=(b-a)/2^n$

h = b-a

|------------------------------------|

a b

When n = 0 , R(1,1) = (h/2){f(a) + f(b)}

h = (b-a)/2 h = (b-a)/2

|-----------------|-------------------|

a a+h b

When n = 1 , R(2,1) = (h/2) {f(a) + f(b)} + h f(a+h)

= (1/2) R(1,1) + h f(a+h)

h=(b-a)/4

|--------|---------|---------|--------|

a a+h a+2h a+3h b

When n = 2:

R(3,1)=(h/2){f(a) + f(b)}+h Sum[f(a+i*h)] , where 1 <= i <= 3

= (h/2) {f(a) + f(b)} + h f(a+2h) + h{f(a+h)+f(a+3h)}

= (1/2) R(2,1) + h {f(a+h) +f(a+3h)}

وعليه وباستخدام العلاقة رقم (١) أعلاه يمكننا ايجاد العمود الاول من المصفوفة التالية والتي سنأخذ منها فقط النصف المثلثي الاسفل أي الواقع تحت قطر المصفوفة الرئيسي والتي ستكون بالشكل التالي :

R(1,1)					
R(2,1)	R(2,2)				
R(3,1)	R(3,2)	R(3,3)			
R(4,1)	R(4,2)	R(4,3)	R(4,4)		
R(5,1)	R(5,2)	R(5,3)	R(5,4)	R(5,5)	
.	.	.	.		
.	.	.	.		
R(n,1)	R(n,2)	R(n,3)	R(n,4)	....	R(n,n)

قطر المصفوفة الرئيسي Diagonal

وفي هذا البحث أخذت أبعاد المصفوفة بقيمة 4x4 ، علماً انه كلما كانت ابعادها اكبر كانت النتائج أفضل وأكثر دقة ، أما باقي عناصر المصفوفة سيتم حسابها وفق العلاقة التالية :

$$R(n+1,m+1) = R(n+1,m) + [R(n+1,m) - R(n,m)]/(4^{m} -1) \quad .....(2)$$

For example :

$$R(2,2) = R(2,1) + [R(2,1) - R(1,1)]/3 \quad \{ m = 1 \text{ and } n = 1\}$$

$$R(5,3) = R(5,2) + [R(5,2) - R(4,2)]/15 \quad \{ m = 2 \text{ and } n = 4\}$$

وعند اتمام حساب عناصر المصفوفة ، ستكون قيمة التكامل التقريبية باستخدام هذه الطريقة مساوي الى الحد الاخير وهو R(4,4) .

<u>أنواع الأخطاء :</u>

هناك نوعان من الأخطاء التي تؤخذ بنظر الاعتبار عند المقارنة بين القيمتين الحقيقية للمقدار والتقريبية . فاذا رمزنا للقيمة الحقيقية أو الدقيقة المضبوطة بالرمز (R) والى القيمة التقريبية المحسوبة باحدى الطرق العددية بالرمز (P) عندها سيكون الخطأ المطلق (Absolute error) يساوي القيمة المطلقة للفرق بين القيمتين . ويرمز له بالرمز (e_x) [١٠]:

$$e_x = \left| R - P \right|$$

أما الخطأ النسبي (Relative Error) فيعرف بالقيمة المطلقة للنسبة بين الخطأ المطلق الى القيمة الحقيقية للمقدار ، ويرمز له بالرمز (ε) :

$$\varepsilon = \left| \frac{R - P}{R} \right|$$

من المفيد حساب هذه الانواع من الخطأ وذلك لغرض المقارنة بين القيمة التقريبية والحقيقية ومدى اقترابها منها ، والذي يحدد كفاءة الطريقة العددية المستخدمة . وفي هذا البحث تم حساب الخطأ النسبي فقط .

الجزء العملي

<u>الفصل الثالث</u>

<u>ايجاد القيم الحقيقية والتقريبية لبعض التكاملات</u>

<u>Evaluating some integrals</u>

لنأخذ ثلاثة أمثلة متنوعة الشكل الرياضي ، وسنجد حلها وفق الطرق والقوانين الرياضية المباشرة .

<u>أولاً - حساب القيم الحقيقية او الدقيقة :</u>

<u>Example – 1:</u>

Find the integral: $\int_0^3 e^x \, dx$

<u>Solution:</u>

$$\int_0^3 e^x \, dx = (e^x]_0^3 = e^3 - e^0 = 20.0855 - 1 = 19.0855$$

R = 19.0855 the real value.

Example - 2:

Find $\int_{0}^{\pi/2} x\cos xdx$

Solution: to evaluate this integral we use **Integration by Parts :**

Let x=u , cosx dx = dv

dx = du , $\int \cos xdx$ = sin x = v

$$\int_{0}^{\pi/2} udv = (uv]_{0}^{\pi/2} - \int_{00}^{\pi/2} vdu = (x\sin x]_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} \sin xdx$$

= (π/2)sin(π/2)-0 - (-cosx]

= (1.5708) - (-cos(π/2) + 1)

= 1.5708 – 1 = 0.5708

R=0.5708 the real value.

Example - 3:

Find the integral: $\int_{1}^{5} \frac{x}{x+3}dx$

Solution:

let x+3=u , dx=du

وبطريقة الفرض علينا التأكد من حدود التكامل ، ان كانت ستتغير أم تبقى على قيمتها ، وذلك من خلال تحديد المتغير الاساسي للتكامل وهو (x) .

When x=1 , u=4 , when x=5 , u=8

Therefore the integral will be as shown below:

$$\int_{1}^{5} \frac{x}{x+3}dx = \int_{4}^{8} \frac{u-3}{u}du = \int_{4}^{8} \frac{u}{u}du - \int_{4}^{8} \frac{1}{u}du$$

= (u] - 3(Lin u] = (8 – 4) – 3(Lin 8 – Lin 4) = 1.9206

R= 1.9206 the real value.

والآن وبعد ان تم حساب القيم الدقيقة لبعض التكاملات المحدودة ، لنحاول حلها بواسطة بعض الطرق المستخدمة في حساب التكاملات والتي تعطينا قيماً تقريبية قد تكون أقرب الى القيم الحقيقية وذلك لغرض دراسة الفروق بين اسلوبي الحل وحساب نسبة الخطأ .

ثانياً - حساب القيم التقريبية لهذه التكاملات باستخدام الطرق الأربعة :

- **طريقة شبه المنحرف [٩] :**

Example – 1:

Find $\int_0^3 e^x\,dx$ using trapezoidal rule by dividing the area into 6 strips. Give your answer correct to 3 decimal places.

المطلوب في هذا المثال حساب قيمة التكامل المذكور بطريقة شبه المنحرف من خلال تقسيم المساحة تحت المنحني الى ست شرائح ، معطياً الاجابة مقربة الى ثلاثة مراتب بعد الفارزة . ولنأخذ الحل بالشكل التالي :

Solution:

In this example, $y = e^x$, $a = 0$, $b = 3$, $n = 6$

$$w = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0.5$$

أي ان عرض الشريحة الواحدة يساوي (0.5) . وفي المعادلة الأخيرة لقانون هذه الطريقة يكون :

$$y_o = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ldots\ldots,\quad y_n = f(x_n)$$

وعند استخدام الجدول وتسجيل البيانات المطلوبة فيه ، يسهل لنا حساب التكامل المطلوب ، حيث تمثل القيمة (m) معامل المتغير (y) في المعادلة الأخيرة المستخدمة في عملية الحساب :

N	x_n	$y_n(=e^x)$	m	my_n
0	0	1	1	1
1	0.5	1.64872	2	3.29744
2	1	2.71828	2	5.43656
3	1.5	4.48169	2	8.96338
4	2	7.38906	2	14.77811
5	2.5	12.18249	2	24.36499
6	3	20.08554	1	20.08554
			Total	**77.92602**

وعليه ستكون قيمة التكامل النهائية تساوي :

$$\int_0^3 e^x\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \frac{3-0}{2(6)}(77.92602)$$

$$= 19.48151$$

$$= 19.482 \text{ (3 d.p.)}$$

P = 19.482 the approximated value.

أما قيمة الخطأ فستكون وفق العلاقة الرياضية التالية :

$$e_x = |R - P|$$

حيث تمثل : (R) القيمة الحقيقية للتكامل .

(P) القيمة التقريبية المحسوبة باحدى طرق الحل التقريبية .

وفي هذا المثال يكون المقدار الدقيق للتكامل يساوي (19.0855) ، وعليه ستكون قيمة الخطأ كما يلي :

$$e_x = |19.0855 - 19.482 = 0.3965|$$

Example - 2:

Find $\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$ using trapezoidal rule by dividing the area into 4 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

Solution:

In this example, ***y = xcosx*** , *a* = 0 , *b* = π/2 , *n* = 4

$$w = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2-0}{4} = 0.3927$$

n	x_n	$y_n(=xcosx)$	*m*	my_n
0	0	0	1	0
1	π/8	0.3628	2	0.7256
2	π/4	0.5554	2	1.1108
3	3π/8	0.4508	2	0.9016
4	π/2	0	1	0
			Total	**2.7380**

Therefore the result is :

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \frac{b-a}{2n}\left(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \frac{\pi/2-0}{2(4)}(2.7380) = 0.5369 = 0.5369 \text{ (4 d.p.)}$$

P= 0.5369 the approximated value.

ولهذا المثال كانت القيمة المضبوطة للتكامل تساوي (0.5708) ، وعليه ستكون قيمة الخطأ كما يلي :

$$e_x = \left| 0.5369 - 0.5708 \right| = 0.0339$$

ملاحظة :

ان القيم المحسوبة باحدى طرق الحل التقريبية تكون أقرب الى القيمة الدقيقة ، أو بمعنى آخر ان قيمة الخطأ النسبي تكون صغيرة جداً في حالة زيادة عدد الشرائح أكثر فأكثر . وسنتمكن في نهاية البحث من اثبات ذلك بشكل نظري من خلال حل أحد الأمثلة مرتين فيهما عدد الشرائح مختلفاً ، لنشاهد مدى دقة الحل مقارنة مع القيمة الحقيقية .

Example - 3:

Find $\int_1^5 \frac{x}{x+3}dx$ using trapezoidal rule by dividing the area into 4 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

Solution:

In this example, ***y = x/x+3*** **,** *a* = 1 , *b* = 5 , *n* = 4

$$w = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

n	x_n	y_n=x/x+3	*m*	my_n
0	1	0.25	1	0.25
1	2	0.4	2	0.8
2	3	0.5	2	1
3	4	0.5714	2	1.1428
4	5	0.6250	1	0.6250
			Total	**3.8178**

Therefore the result is :

$$\int_{1}^{5} \frac{x}{x+3}dx = \frac{b-a}{2n}\left(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \frac{5-1}{2(4)}\left(3.8178\right) = 1.9089 \quad (4\ \text{d.p.})$$

P= 1.9089 the approximated value.

وبما ان القيمة المضبوطة لهذا التكامل والمحسوبة سابقاً تساوي (1.9206) عليه ومن هذه النتائج نستطيع حساب قيمة الخطأ كما يلي :

$$e_x = |1.9206 - 1.9089| = 0.0117$$

- **طريقة سمبسون [٧] :**

Example -1:

Find $\int_{0}^{3} e^{x}\,dx$ using Simpson's rule by dividing the area into 6 strips. Give your answer correct to 3 decimal places.

Solution:

a=0 , b=3 , h=0.5

$x_1=0$ $x_2=0.5$ $x_3=1$ $x_4=1.5$ $x_5=2$ $x_6=2.5$ $x_7=3$

$$\int_{0}^{3} e^{x}dx = \frac{1}{3}h[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_{0}^{3} e^{x}dx = \frac{1}{6}[e^{0} + 4e^{0.5} + 2e^{1} + 4e^{1.5} + 2e^{2} + 4e^{2.5} + e^{3}]$$

$$= 19.092$$

P= 19.092 the approximated value.

ان النتيجة المحسوبة باستخدام طريقة سمبسون هي أقرب من القيمة الدقيقة المحسوبة لنفس التكامل سابقاً ، حيث كانت تساوي (19.0855) . لذلك تعتبر هذه الطريقة أكثر دقة من طريقة شبه المنحرف .

ولحساب قيمة الخطأ ستكون وفق العلاقة التالية :

$$e_x = |19.0855 - 19.092| = 0.0065$$

ولنأخذ المثال الآخر ونحاول حله بهذه الطريقة لمقارنة النتائج :

<u>Example -2:</u>

Find $\int_0^{\pi/2} x \cos xdx$ using Simpson's rule by dividing the area into 4 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

<u>Solution:</u>

$a=0$, $b=\pi/2$, $h=\pi/8$

$x_1=0$ $x_2=\pi/8$ $x_3=\pi/4$ $x_4=3\pi/8$ $x_5=\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos xdx =$$

$$(1/3)h[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= (\pi/24)[0+1.4512+1.1107+1.8034+0] = 0.5714$$

P= 0.5714 the approximated value.

وهنا ايضاً كانت القيمة المحسوبة والتقريبية باستخدام هذه الطريقة مقارب جداً للقيمة الدقيقة والمحسوبة لهذا التكامل سابقاً والتي كانت تساوي (0.5708) لهذا تعتبر هذه الطريقة أيضاً أفضل من طريقة شبه المنحرف .

$$e_x = |0.5708 - 0.5714| = 0.0006$$

Example - 3:

Find $\int_{1}^{5} \frac{x}{x+3} dx$ using Simpson's rule by dividing the area into 4 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

Solution:

In this example, ***y = x/x+3*** , *a* = 1 , *b* = 5 , *n* = 4 , *h*=1

$x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=3$ $x_4=4$ $x_5=5$

$\int_{1}^{5} \frac{x}{x+3} dx =$

$(1/3)h[\ f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3\ ) + 4f(x_4) + \ldots.. +2f(x_{n-2}\ ) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$= (1/3)[0.25+1.6+1+16/7+5/8] = 1.9202$

P= 1.9202 the approximated value.

وستكون قيمة الخطأ كما يلي :

$e_x = \left| 1.9206 - 1.9202 \right| = 0.0004$

- **طريقة النقطة الوسطى [٩] :**

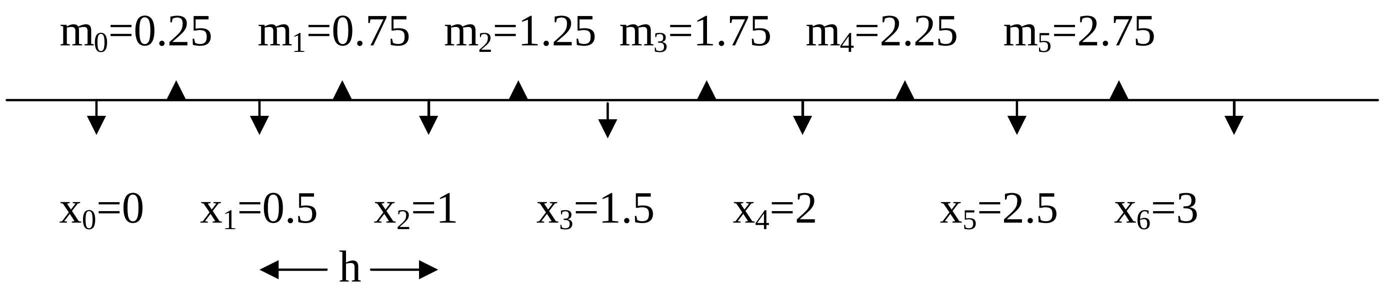
ولتوضيح هذه الطريقة لنأخذ نفس الأمثلة السابقة وذلك لغرض المقارنة بين هذه الطرق العددية لحساب التكامل المحدود :

Example -1:

Find $\int_{0}^{3} e^{x} dx$ using midpoint rule by dividing the area into 6 strips. Give your answer correct to 3 decimal places.

Solution:

a=0 , b=3 , h=0.5



$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0.5$$

n	m_n	$f(m_n)$	$hf(m_n)$
0	0.25	1.2840	0.6420
1	0.75	2.1170	1.0585
2	1.25	3.4903	1.7452
3	1.75	5.7546	2.8773
4	2.25	9.4877	4.7439
5	2.75	15.6426	7.8213
			Total = 18.8882

P= 18.8882 the approximated value.

لاحظ هنا ان المساحة المحسوبة بهذه الطريقة تساوي (**18.8882**) وهي أبعد الى القيمة المضبوطة والمحسوبة مباشرة من حل التكامل المحدود والتي تساوي **(19.0855)** .

وستكون نسبة الخطأ كما يلي :

$$e_x = \left|19.0855 - 18.8882\right| = 0.1973$$

وحسب هذه النتائج تكون طريقة سمبسون هي أفضل الطرق الثلاثة هذه في حساب التكاملات المحدودة . والسبب لانها اعطت افضل النتائج قرباً من القيمة المضبوطة للتكامل .

والآن لنأخذ المثال الآخر ونجد حله بهذه الطريقة لنقارن النتائج مع الطرق الآخرى :

Example -2:

Find $\int_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx$ using midpoint method by dividing the area into 4 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

Solution: a=0 , b=π/2 , h=π/8

$m_0 = \pi/16$ $m_1 = 3\pi/16$ $m_2 = 5\pi/16$ $m_3 = 7\pi/16$

$x_0 = 0$ $x_1 = \pi/8$ $x_2 = \pi/4$ $x_3 = 3\pi/8$ $x_4 = \pi/2$

$\longleftarrow h \longrightarrow$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{4} = \pi/8$$

n	m_n	$f(m_n)$	$hf(m_n)$
0	π/16	0.1926	0.0756
1	3π/16	0.4898	0.1923
2	5π/16	0.5454	0.2142
3	7π/16	0.2681	0.1053
			Total = 0.5874

P= 0.5874 the approximated value.

ان القيمة التقريبية المحسوبة لهذا المثال تساوي (**0.5874**) وهي ليست اقرب من القيمة الحقيقية كطريقة سمبسون .

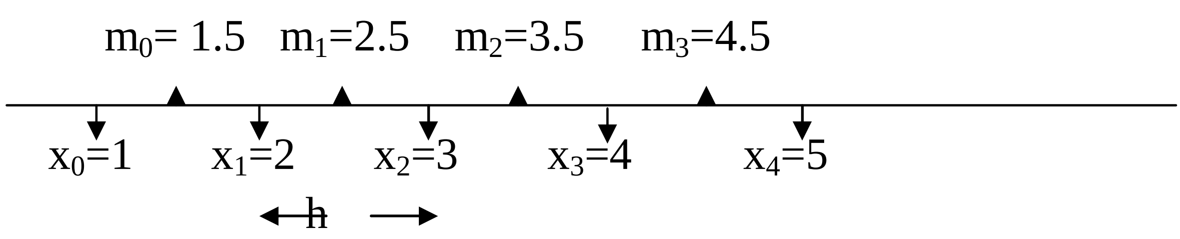
$$e_x = \left| 0.5708 - 0.5874 \right| = 0.0166$$

Example - 3:

Find $\int_1^5 \frac{x}{x+3}dx$ using midpoint rule by dividing the area into 4 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

Solution:

In this example, $y = x/x+3$, $a = 1$, $b = 5$, $n = 4$, $h=1$



$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

n	m_n	$f(m_n)$	$hf(m_n)$
0	1.5	0.3333	0.3333
1	2.5	0.4545	0.4545
2	3.5	0.5385	0.5385
3	4.5	0.6000	0.6000
			Total = 1.9263

P= 1.9263 the approximated value.

وستكون قيمة الخطأ النسبي كما يلي :

$$e_x = \left| 1.9206 - 1.9263 \right| = 0.0057$$

- **طريقة رومبيرج** [٣] **:**

Example -1:

Find $\int_0^3 e^x\,dx$ using Romberg method.

Solution:

First of all we must calculate **R(n+1,1)** and **h** from these equations:

$$R(n+1,1) = \frac{h}{2}\{ f(a) + f(b) \} + h \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a+ih)$$

$$h = \frac{b-a}{2^n}$$

n=0 : $h = b - a = 3 - 0 = 3$

$R(1,1) = (h/2)[f(0)+f(3)] = (3/2)[1+e^3] = 31.6283$

n=1 : $h=(b-a)/2=(3+0)/2=3/2$

$R(2,1)=(3/4)[f(0)+f(3)]+(3/2)[f(0+3/2)]=22.5367$

n=2 : $h=(b-a)/4=(3-0)/4=3/4$

$R(3,1)=(3/8)[f(0)+f(3)]+(3/4)[f(3/4)+f(3/2)+f(9/4)]=19.9719$

n=3 : $h = (b-a)/8 = (3-0)/8 = 3/8$

$R(4,1)=(3/16)[f(0)+f(3)]+(3/8)[f(3/8)+f(3/4)+f(9/8)+f(3/2)+f(15/8)+ f(9/4) +f(21/8)]=19.3087$

Then we will calculate **R(n+1,m+1)** from the equation:

$R(n+1,m+1)=R(n+1,m)+((R(n+1,m)-R(n,m))/(4^m - 1))$

R(2,2)=R(2,1)+((R(2,1)-R(1,1))/3

= 22.5367+((22.5367-31.6283)/3)=19.5062

R(3,2)=R(3,1)+((R(3,1)-R(2,1))/3)

=19.9719+((19.9719-225367)/3)=19.117

R(3,3)=R(3,2)+((R(3,2)-R(2,2))/15)

=19.117+((19.117-19.5062)/15)=19.0911

R(4,2)=R(4,1)+((R(4,1)-R(3,1))/3)

=19.3087+((19.3087-19.9719)/3)=19.0876

R(4,3)=R(4,2)+((R(4,2)-R(3,2))/15)

=19.0876+((19.0876-19.117)/15)=19.0856

R(4,4)=R(4,3)+((R(4,3)-R(3,3))/63)

=19.0856+((19.0856-19.0911)/63)=**19.0855**

P= 19.0855 the approximated value.

وستكون قيمة الخطأ النسبي كما يلي :

$$e_x = \left| 19.0855 - 19.0855 \right| = 0$$

ملاحظة : ان تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية في هذا المثال ليس دقيقاً تماماً بل هناك فرق صغير جداً ، وان البرنامج المستخدم (MATLAB) في عمليات الحساب في هذا البحث يقرب الاعداد الى الاربعة مراتب بعد الفارزة ، اي ان النتائج المستحصلة بهذه الطريقة هي أقرب الى القيم الدقيقة من غيرها من الطرق المستخدمة في البحث .

Example -2:

Find $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ using Romberg method.

Solution:

R(n+1,1) = (h/2){f(a)+f(b)} + h Sum[f(a+i*h)] , $h=(b-a)/2^n$

n=0 : h=b-a=π/2-0= π/2

R(1,1)=(π/4)[f(0)-f(π/2)] = (π/4)[0+ π/2cos π/2]=0

n=1 : $h=(b-a)/2=(\pi/2-0)/2=\pi/4$

$R(2,1)=(\pi/8)[f(0)+f(\pi/2)]+(\pi/4)[f(0+\pi/4\cos\pi/4)]=0.4362$

n=2 : $h=(b-a)/4=(\pi/2-0)/4=\pi/8$

$R(3,1)=(\pi/16)[f(0)+f(\pi/2)]+(\pi/8)[f(\pi/8)+f(\pi/4)+f(3\pi/8)]$
$=0.5376$

n=3 : $h=(b-a)/8=(\pi/2-0)/8=\pi/16$

$R(4,1)=(\pi/32)[f(0)+f(\pi/2)]+(\pi/16)[f(\pi/16)+f(\pi/8)+f(3\pi/16)+$
$f(\pi/4)+f(5\pi/16)+f(3\pi/8)+f(7\pi/16)]=0.5625$

$R(n+1,m+1)=R(n+1,m)+((R(n+1,m)-R(n,m))/(4^m-1))$

$R(2,2)=R(2,1)+((R(2,1)-R(1,1))/3=0.4362+((0.4362-0)/3)$
$=0.5816$

$R(3,2)=R(3,1)+((R(3,1)-R(2,1))/3)$
$=0.5376+((0.5376-0.4362)/3)=0.5714$

$R(3,3)=R(3,2)+((R(3,2)-R(2,2))/15)$
$=0.5714+((0.5714-0.5816)/15)=0.5707$

$R(4,2)=R(4,1)+((R(4,1)-R(3,1))/3)$
$=0.5625+((0.5625-0.5376)/3)=0.5708$

$R(4,3)=R(4,2)+((R(4,2)-R(3,2))/15)$
$=0.5708+((0.5708-0.5714)/15)=0.5708$

$R(4,4)=R(4,3)+((R(4,3)-R(3,3))/63)$
$=0.5708+((0.5708-0.5707)/63)=\mathbf{0.5708}$

P= 0.5708 the approximated value.

وستكون قيمة الخطأ النسبي كما يلي :

$$e_x=\left|0.5708-0.5708\right|=0$$

ملاحظة : وكما ذكرنا بالمثال السابق ان تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية في هذا المثال ليس دقيقاً تماماً بل هناك فرق صغير جداً ، وان البرنامج المستخدم (MATLAB) في عمليات الحساب في هذا البحث يقرب الاعداد الى الاربعة مراتب بعد الفارزة ، اي ان النتائج المستحصلة بهذه الطريقة هي أقرب الى القيم الدقيقة من غيرها من الطرق المستخدمة في البحث .

Example - 3:

Find $\int_1^5 \frac{x}{x+3}dx$ using Romberg method.

Solution:

R(n+1,1) = (h/2){f(a)+f(b)} + h Sum[f(a+i*h)] , $h=(b-a)/2^n$

n=0 : h=b-a=5-1=4

R(1,1)=2[f(1)-f(5)] =1.75

n=1 : h=(b-a)/2=(5-1)/2=2

R(2,1)=(1)[f(1)+f(5)]+2*1/2=1.875

n=2 : h=(b-a)/4=(5-1)/4=1

R(3,1)=(1/2)[f(1)+f(5)]+2/5+1/2+4/7=1.9089

n=3 : h=(b-a)/8=(5-1)/8= 1/2

R(4,1)=(1/4)[f(1)+f(5)]+(1/2)[1.5/4.5+2/5+2.5/5.5+1/2+ 3.5/6.5+4/7+4.5/7.5] =1.9176

$R(n+1,m+1)=R(n+1,m)+((R(n+1,m)-R(n,m))/(4^m - 1))$

R(2,2)=R(2,1)+((R(2,1)-R(1,1))/3

= 1.875+((1.875-1.75)/3)=1.9167

R(3,2)=R(3,1)+((R(3,1)-R(2,1))/3)

=1.9089+((1.9089-1.875)/3)=1.9202

R(3,3)=R(3,2)+((R(3,2)-R(2,2))/15)

=1.9202+((1.9202-1.9167)/15)=1.9204

R(4,2)=R(4,1)+((R(4,1)-R(3,1))/3)

$=1.9176+((1.9176-1.9089)/3)=1.9205$

$R(4,3)=R(4,2)+((R(4,2)-R(3,2))/15)$

$=1.9205+((1.9205-1.9202)/15)=1.9205$

$R(4,4)=R(4,3)+((R(4,3)-R(3,3))/63)$

$=1.9205+((1.9205-1.9204)/63)=\mathbf{1.9205}$

P= 1.9205 the approximated value.

وستكون قيمة الخطأ النسبي كما يلي :

$$e_x = \left| 1.9206 - 1.9205 \right| = 0.0001$$

لاحظ في هذا المثال وجد فرق في القيم التقريبية المحسوبة عن القيم الحقيقية ، ولو أنه صغير لكنه يختلف عن ماجرى بالامثلة السابقة ولنفس الطريقة هذه .

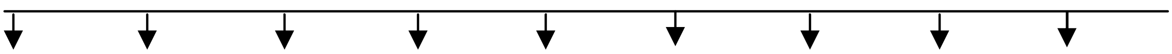
ثالثاً - دراسة تأثير زيادة عدد الشرائح على النتائج المحسوبة (٥) :

لنأخذ أحد الأمثلة ونضاعف عدد الشرائح المأخوذة ويكفي اختيار أحد الطرق للقياس ولتكن طريقة سمبسون باعتبارها وفق بحثنا هذا من أفضل الطرق التي تم بحثها من حيث النتائج المستخرجة ومدى قربها من القيم الدقيقة او الحقيقية للتكاملات المأخوذة .

Example - 3:

Find $\int_1^5 \frac{x}{x+3}dx$ using Simpson's rule by dividing the area into 8 strips. Give your answer correct to 4 decimal places.

Solution: In this example, ***y = x/x+3*** **,** $a = 1$, $b = 5$, $n = 8$, $h=0.5$



$x_1=1$ $x_2=1.5$ $x_3=2$ $x_4=2.5$ $x_5=3$ $x_6=3.5$ $x_7=4$ $x_8=4.5$ $x_9=5$

$$\int_1^5 \frac{x}{x+3}dx =$$

$$(1/3)h[\, f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$= (1/6)[0.25+1.3332+0.8+1.818+1+2.154+1.1428+2.4+0.625]$

$= 1.9205$

$$e_x = \left| 1.9206 - 1.9205 \right| = 0.0001$$

عند مقارنة القيمة المحسوبة لهذا المثال بعد تقسيم المساحة تحت منحني الدالة الى ثمانية شرائح نجد ان النتائج المحسوبة قريبة جداً من القيمة الحقيقية للتكامل ، فالقيمة الحقيقية تساوي (**1.9206**) والتقريبية تساوي (**1.9205**) وبهذا يتم لنا البرهنة عملياً بأن زيادة عدد الشرائح يؤدي بالتالي الى زيادة دقة النتائج المحسوبة . والنتيجة مشابهة لطريقة رومبيرج ولنفس المثال مما يثبت دقة هذه الطريقة وتقارب حلولها مع الحلول الحقيقية .

رابعاً – البرامج المستخدمة في حساب التكاملات [٨] :

استخدم البرنامج الرياضي (MATLAB) في حساب التكاملات المحدودة المشمولة بهذا البحث ، وأدناه البرامج المكتوبة بهذه اللغة :

(Trapezoidal Rule)

Example 1:

```
a=0؛
b=3؛
n=6؛
w=(b-a)/n؛
x=0:0.5:3؛
y=exp(x);
p=(w/2)*(y(1)+2*y(2)+2*y(3)+2*y(4)+2*y(5)+2*y(6)+y(7))
```

The result is : p=19.482

Example 2:

```
a=0;
b=pi/2;
n=4;
w=(b-a)/n;
x=0:pi/8:pi/2;
y=x.*cos(x);
```

```
p=(w/2)*(y(1)+2*y(2)+2*y(3)+2*y(4)+y(5))
```

The result is : p=0.5369

Example 3:

```
a=1;
b=5;
n=4;
w=(b-a)/n;
x=1:1:5;
y=x./(x+3);
p=(w/2)*(y(1)+2*y(2)+2*y(3)+2*y(4)+y(5))
```

The result is : p=1.9089

(Simpson Rule)

Example 1:

```
a=0;
b=3;
n=6;
h=(b-a)/n;
x=0:0.5:3;
y=exp(x);
p=(h/3)*(y(1)+4*y(2)+2*y(3)+4*y(4)+2*y(5)+4*y(6)+y(7))
```

The result is : p=19.0920

Example 2:

```
a=0;
b=pi/2;
n=4;
h=(b-a)/n;
x=0:pi/8:pi/2;
y=x.*cos(x);
p=(h/3)*(y(1)+4*y(2)+2*y(3)+4*y(4)+y(5))
```

The result is : p=0.5714

Example 3:

```
a=1;
b=5;
n=4;
h=(b-a)/n;
x=1:1:5;
y=x./(x+3);
p=(h/3)*(y(1)+4*y(2)+2*y(3)+4*y(4)+y(5))
```

The result is : p=1.9202

(Midpoint Rule)

Example 1:

```
a=0;
b=3;
n=6;
h=(b-a)/n;
x=0.25:0.5:2.75;
y=exp(x);
p=h*sum(y)
```

The result is : p=18.8882

Example 2:

```
a=0;
b=pi/2;
n=4;
h=(b-a)/n;
x=pi/8:pi/8:3*pi/8;
y=x.*cos(x);
p=h*sum(y)
```

The result is : p=0.5874

Example 3:

```
a=1;
b=5;
```

```
n=4;
h=(b-a)/n;
x=1.5:1:4.5;
y=x./(x+3);
p=h*sum(y)
```

The result is : p=1.9263

(Romberg Rule)

Example 1:

```
a=0;
b=3;
for n=0:1:3;
   h=(b-a)/2^n;
   k=0;
   for i=1:2^n-1
      k=k+exp(a+i*h);
   end
   r(n+1,1)=(h/2)*(exp(a)+exp(b))+h*k;
end
r(2,2)=r(2,1)+(r(2,1)-r(1,1))/3;
r(3,2)=r(3,1)+(r(3,1)-r(2,1))/3;
r(3,3)=r(3,2)+(r(3,2)-r(2,2))/15;
r(4,2)=r(4,1)+(r(4,1)-r(3,1))/3;
r(4,3)=r(4,2)+(r(4,2)-r(3,2))/15;
r(4,4)=r(4,3)+(r(4,3)-r(3,3))/63
```

The result of execution of this program is :

31.6283	0	0	0
22.5367	19.5061	0	0
19.9719	19.1170	19.0910	0
19.3087	19.0876	19.0856	**19.0856**

The result is : p=19.0855

Example 2:

```
a=0;
b=pi/2;
for n=0:1:3;
   h=(b-a)/2^n;
   k=0;
   for i=1:2^n-1
      k=k+(a+i*h)*cos(a+i*h);
   end
   r(n+1,1)=(h/2)*(a*cos(a)+b*cos(b))+h*k;
end
r(2,2)=r(2,1)+(r(2,1)-r(1,1))/3;
r(3,2)=r(3,1)+(r(3,1)-r(2,1))/3;
r(3,3)=r(3,2)+(r(3,2)-r(2,2))/15;
r(4,2)=r(4,1)+(r(4,1)-r(3,1))/3;
r(4,3)=r(4,2)+(r(4,2)-r(3,2))/15;
r(4,4)=r(4,3)+(r(4,3)-r(3,3))/63
```

The result of execution of this program is :

0.0000	0	0	0
0.4362	0.5816	0	0
0.5376	0.5714	0.5707	0
0.5625	0.5708	0.5708	**0.5708**

The result is : p=0.5708

Example 3:

```
a=1;
b=5;
for n=0:1:3;
   h=(b-a)/2^n;
   k=0;
   for i=1:2^n-1
      k=k+(a+i*h)/((a+i*h)+3);
   end
```

```
   r(n+1,1)=(h/2)*(a/(a+3)+b/(b+3))+h*k;
end
r(2,2)=r(2,1)+(r(2,1)-r(1,1))/3;
r(3,2)=r(3,1)+(r(3,1)-r(2,1))/3;
r(3,3)=r(3,2)+(r(3,2)-r(2,2))/15;
r(4,2)=r(4,1)+(r(4,1)-r(3,1))/3;
r(4,3)=r(4,2)+(r(4,2)-r(3,2))/15;
r(4,4)=r(4,3)+(r(4,3)-r(3,3))/63
```

The result of execution of this program is :

1.7500	0	0	0
1.8750	1.9167	0	0
1.9089	1.9202	1.9205	0
1.9176	1.9205	1.9206	**1.9206**

The result is : p=1.9205

الاستنتاجات والتوصيات :

لأجل مقارنة النتائج المحسوبة لهذه الطرق لنكتبها على شكل جدول ليتسنى لنا ملاحظة الفرق بينها من حيث تقارب القيم التقريبية مع القيم الحقيقية :

جدول رقم (١)

القيم الحقيقية والتقريبية للتكاملات

الدالــة	القيمة الحقيقية	القيم التقريبية			
		شبه المنحرف	سمبسون	النقطة الوسطى	رومبيرج
$\int_0^3 e^x dx$	19.0855	19.482	19.092	18.8882	19.0855
$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$	0.6708	0.5369	0.5714	0.5874	0.5708
$\int_1^5 \frac{x}{x+3} dx$	1.9206	1.9089	1.9202	1.9263	1.9205

جدول رقم (٢)
نسبة الخطأ للتكاملات

الدالة	شبه المنحرف	سمبسون	النقطة الوسطى	رومبيرج
	نسبة الخطأ المحسوبة بالطرق المشروحة سابقاً			
$\int_0^3 e^x dx$	0.3965	0.0065	0.1973	0
$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$	0.0339	0.0006	0.0166	0
$\int_1^5 \frac{x}{x+3} dx$	0.0117	0.0004	0.0057	0.0001

نلاحظ من الجدولين أعلاه ان طريقة **رومبيرج** هي الأفضل من حيث القيم التقريبية المحسوبة ومدى تقاربها من القيم الحقيقية للتكاملات المأخوذة في البحث . وتأتي طريقة **سمبسون** في الدرجة الثانية .

ومن المفيد التذكير مرة اخرى بأن تساوي القيم الحقيقية مع التقريبية في طريقة رومبيرج لايعني ان هذه الطريقة دقيقة مئة في المئة بل هناك فرق صغير جداً لأن البرنامج المستخدم في حساب القيم او حساب نتائج المعادلات الرياضية في هذا البحث هو برنامج (MATLAB) والذي يقرب النتائج حسب مايريد الشخص ، وفي هذا البحث تم تقريب النتائج الحسابية لأربعة مراتب بعد الفارزة .

ان زيادة عدد الشرائح المأخوذة يؤدي الى زيادة الدقة في حساب المساحات تحت المنحني ، وهذا ماتم اثباته عملياً في البحث .

يمكن للباحث الذي يريد اكمال ماتم أخذه في هذا البحث ان يدرس تأثير شكل الدالة على النتائج المحسوبة ، فهناك دوال متعددة الحدود من الدرجة الاولى والتي يكون تمثيلها البياني عبارة عن خط مستقيم ، ودوال اخرى من الدرجة الثانية يكون تمثيلها البياني على هيئة منحني ، ودوال اخرى مثلثية وأخرى كسرية ، واخرى أسية وغيرها .

المصــادر :

1- Ian Craw, "Advanced Calculus and Analysis", University of Aberdeen, 2000, p93.
2- Joe D. Hoffman, "Numerical Methods for Engineers and Scientists", second edition,2001, New York, p27.
3- Won Y. Yang, "Applied Numerical Methods Using MATLAB", USA,2005, p222.
4- George W. Collins, "Fundamental Numerical Methods and Data Analysis", USA.
5- Alan Jeffrey, "Handbook of Mathematical Formulas and Integrals", second edition, University of Newcastle, UK.
6- Sean Mauch, "Introduction to Methods of Applied Mathematics", USA, 2001, p100.
7- "MATLAB, the Language of Technical Computing", Language Reference Manual, v5, USA.
8- Stephen J. Chapman, "MATLAB Programming for Engineers", second edition, USA.
9- S.R.Otto & J.P.Denier, "An Introduction to Programming & Numerical Methods in MATLAB", University of Adelaide,Astralia,2005,p225.

مواقع الانترنت :

10- www.mathramz.com
11- www.mathwork.com
12- www.wikipedia.com
13- www.kutub.com