ملاحظات على توزيع ويبل

Notes on Weibull Distribution

أ. م. علي عبد الحسين الوكيل
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

الخلاصة

يعتبر توزيع ويبل من التوزيعات المهمة المستخدمة في المعولية وفي توزيع فترات البقاء. وقد احتوت الدراسة على توزيع ويبل ذو المعلمتين وذو الثلاث معالم وكذلك توزيع باي ويبل ذو الخمسة معالم والذي لم تتطرق له العديد من الكتب والمصادر لانه من المواضيع الحديثة جدا حيث انه يعتمد على توزيعي ويبل ذو المعلمتين وذو ثلاث معالم باستخدام معلمتي القياس (α) والشكل(β) لاحدهما واضافة معلمة الموضع (γ) للاخر وبدمج هذين التوزيعين يظهر توزيع يحتوي علة خمسة معالم اثنان من توزيع وثلاثة من توزيع اخر.

وقد تم التطرق في هذا البحث الى علاقة توزيعات ويبل مع التوزيعات الاخرى مثل التوزيع الاسي، توزيع كاي، توزيع كاما وتوزيع كامبل (القيمة المتطرفة).

هذا وقد كانت هناك جملة من الملاحظات التي اخذت بنظر الاعتبار منها اهمية هذا التوزيع وتطبيقاته في مجال المعولية.

لقد اعتمدت الدراسة على اخر البحوث والدراسات الحديثة عن هذا الموضوع ولغاية شهر مايس ٢٠٠٤.

Abstract

Weibull Distribution is one of most important distribution and it is mainly used in reliability and in distribution of life time. The study handled two parameter and three-parameter Weibull Distribution in addition to five –parameter Bi-Weibull distribution. The latter being very new and was not mentioned before in many of the previous references. This distribution depends on both the two parameter and the three –parameter Weibull distributions by using the scale parameter (α) and the shape parameter (β) in the first and adding the location parameter (γ)to the second and then joining them together to produce a distribution with five parameters.

The paper also handled the relationship between Weibull Distribution and the other known distributions such as the exponential distribution, Chi distribution, Gamma distribution and Gumbel (extreme value) distribution.

The paper considered a number of important notes including the importance and the application of Weibull distribution in the field of reliability.

The study depended on the most recent research papers on this subject and until May 2004.

١- المقدمة

من التوزيعات المستخدمة في المعولية هو توزيع ويبل حيث انه من الممكن ان يعتمد على عدة معالم. لذلك فان توزيع ويبل ياخذ الاهمية القصوى في الدراسات العلمية التي تعتمد تحديد فترة البقاء في تطبيقات المعولية وان المعالم الموجودة في التوزيع سواء كانت معلمتين او اكثر تشير الى ان المتغير ويبل لـه مجال $0 \leq X < \infty$ وان معلمة القياس α تكون اكبر من الصفر وان معلمة الشكل β يجب ان تكون ايضا اكبر من الصفر وهكذا لبقية المعالم في التوزيع.

٢- هدف البحث

يهدف البحث الى دراسة تفصيلية لتوزيع ويبل في حالاته واكثر التوزيعات المترابطة معه. ولذلك احاول ان اعطي فكرة موسعة عن هذا التوزيع المستخدم في كثير من دراسات فترة البقاء **life time** وفي مختلف المجالات والتي تسمى في بعض الكتب تحليل ويبل او تحليل بيانات البقاء **life data analysis** والذي عن طريقه يتمكن الباحث من ان يصل الى التنبؤ حول فترة البقاء.

٣- توزيع ويبل

استخدم توزيع ويبل عام ١٩٥١ من قبل الباحث والدي ويبل (**Wallodi Weibull**) للعرض التجريبي لمشاهدة التغير في تمدد الحديد وايضا استخدام هذا التوزيع في التغير في فترة الخدمة التي يقضيها موظفو الاذاعة. وقد شاع استخدام توزيع ويبل ذو المعلمتين والمتعدد المعالم والذي ستذكر استخداماته لاحقا في مجال المعولية وفي تجارب اختبار البقاء ولذلك نرى تطبيقاته شملت توزيع فترة البقاء ومختلف حالات الفشل بالاضافة الى بناء النماذج في المعولية.

ان هذا التوزيع يمكن اختصاره الى التوزيع الاسي عندما تكون معلمة الشكل تساوي واحد وان توزيع ويبل له معدل فشل متزايد عندما تكون معلمة الشكل اكبر من واحد ولها معدل فشل متناقص عندما تكون معلمة الشكل اقل من واحد.

ان المتغير ويبل $\omega:\alpha,\beta$ والذي فيه المجال $0 \leq X < \infty$ لـه معلمة القياس $\alpha > 0$ ولـه معلمة الشكل $\beta > 0$ ولذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية **p.d.f.** تكون كما يلي:

$$f(x) = \left(\beta X^{\beta-1} \;/\alpha^{\beta}\right) e^{-x/\alpha^{\beta}}$$

وعن طريق هذه الدالة ممكن ان نحصل على الدالة التجميعية **c. d. f.**

$$F(x) = 1 - e^{-x/\alpha^{\beta}}$$

اما دالة الخطر **Hazard function** فتظهر بالشكل التالي

$$h(x) = \beta\, x^{\beta-1}/\alpha^{\beta}$$

والمتوسط لها هو

$$\alpha\Gamma[(\beta+1)/\beta]$$

والتباين هو

$$\alpha^2[\Gamma\{(\beta+2)/\beta\}] - [\Gamma\{(\beta+1)/\beta\}]^2$$

والعزوم **rth** حول المتوسط

$$\alpha^r\Gamma[\beta + r/\beta]$$

وان ميزة البقاء لـ (α) لها خاصية

$$p\big((\omega:\alpha,\beta)\leq \alpha\big)=1-e^{-1}=0.63$$

٣-١ علاقات متغير ويبل

$$\omega:\alpha,\beta \sim \alpha(\omega:1,\beta)$$

١- ان المتغير ويبل $\omega:\alpha,\beta$ الذي فيه معلمة الشكل $\beta=1$ تمثل المتغير الاسي $Exp:\alpha$ مع المتوسط α

$$\omega:\alpha,1\sim Exp:\alpha$$

٢- ان المتغير ويبل $\omega:\alpha,2$ هو متغير راليه Rayleigh Variate والذي فيه معلمة الشكل $\beta=2$

٣- ان المتغير ويبل $\omega:\alpha,\beta$ لـه علاقة بقيمة المتغير القياسي المتطرف (standard Extreme Value Variate) $v:0,1$ وكما يلي:

$$-\beta\log[(\omega:\alpha,\beta)/\alpha]\sim v:0,1$$

٣-٢ تقدير المعلمة Parameter Estimation

من الممكن الحصول على تقدير المعلمة باستخدام طريقة الامكان الاعظم .M. L. E لقيمة $\alpha^\wedge,\beta^\wedge$ لمعلمة الشكل والقياس عن طريق حلها بواسطة المعادلات فنحصل على قيمة

$$\alpha^\wedge=\left[(1/n)\sum_{i=1}^{n}X_i^{\beta^\wedge}\right]^{1/\beta^\wedge}$$

$$\beta^\wedge=\frac{n}{(1/\alpha^\wedge)\sum_{i=1}^{n}Xi\beta^\wedge\log Xi-\sum_{i=1}^{n}\log Xi}$$

ومن الممكن توليد الارقام العشوائية لمتغير ويبل $\omega:\alpha,\beta$ باستخدام العلاقة التالية

$$\omega:\alpha,\beta\sim\alpha(-\log R)^{1/\beta}$$

٣-٣ توزيع ويبل ذو الثلاث معالم

من الممكن الحصول على توزيع ويبل ذو الثلاث معالم بالاعتماد على توزيع ويبل ذو المعلمتين مع اضافة معلمة ثالثة وهي معلمة الموقع والتي يشار اليها بالرمز (γ) (كاما) وان الدالة الكثافة الاحتمالية .p. d .f لها تكون صفر عندما $X<\gamma$ ولذلك يكون لدينا توزيع ويبل مع نقطة الاصل (γ) في التطبيقات المعولية ان هذه المعلمة تشير الى اقل فترة بقاء (Minimum Life) ولكن هذا لا يعني بالضرورة عدم امكانية حدوث حالات فشل تحت هذه القيمة في المستقبل، وان المتغير ويبل $\omega:\gamma,\alpha,\beta$ سوف يوضح لنا ان $\gamma>0$ تشير الى معلمة الموقع وان $\alpha>0$ تشير الى معلمة القياس وان $\beta>0$ تشير الى معلمة الشكل وان المجال $\gamma\leq X\leq +\infty$ وان دالة .p. d. f تكون

$$f(x)=\left[\beta\,(X-\gamma)^{\beta-1}/\alpha^{\beta}\right]e^{-[(x-\gamma)/\alpha]^{\beta}}\qquad X\geq\gamma$$

وان دالة .c. d. f

$$F(x)=1-e^{-[(x-\gamma)/\alpha]^{\beta}}\qquad X\geq\gamma$$

ودالة الخطر Hazard function

$$h(x)=\beta(X-\gamma)^{\beta-1}/\alpha^{\beta}\qquad X\geq\gamma$$

وان المتوسط هو

$$\gamma + \alpha\Gamma[(\beta+1)/\beta]$$

والتباين

$$\alpha^2(\Gamma[(\beta+2)/\beta] - [\Gamma(\beta+1)/\beta]^2$$

ويتم توليد العدد العشوائي لتوزيع ويبل ذو الثلاث معالم باستخدام العلاقة التالية

$$(\omega:\gamma,\alpha,\beta)\sim\gamma + \alpha(-\log R)^{1/\beta}$$

٣-٤ توزيع باي ويبل Bi- Weibull Distribution

من الممكن الحصول على توزيع باي ويبل من اشتراك توزيعين لـ (ويبل) وهذا سيوفر لنا نموذج توزيع له شكل مرن. ومن الممكن الحصول على مرونة اكثر باضافة اكثر من توزيعين لـ (ويبل) وهذا مما يزيد من عدد المعالم المقدرة.

لقد تم اقتراح عدد من البحوث الخاصة بتوزيع باي ويبل من قبل عدد من الباحثين وتختلف هذه البحوث في طريقة ربط هذين التوزيعين لـ (ويبل) وفي عدد المعالم الخاصة بهما.

٣-٥ توزيع باي ويبل ذو خمسة معالم Five parameter Bi- Weibull Distribution

هناك توزيع اخر لـ(ويبل) يدعى باي ويبل ذو خمسة معالم، حيث فيه معلمة القياس $\lambda>0$ ومعلمة الشكل $\theta>0$. كذلك توجد حالة اخرى عندما تكون معلمة الموضع $\gamma\geq 0$ ومعلمة القياس $\alpha>0$ ومعلمة الشكل $\beta>0$.

وان هذا التوزيع يمكن الحصول عليه من دالتي الخطر لويبل.

وان هذه الدالة الاولى تتكون من معلمتي دالة الخطر لويبل كما في المعادلة التالية:

$$h(x) = \lambda\theta(\lambda x)^{\theta-1}$$

حيث ان X يمثل مركبة العمر، وان $h(x)$ يمثل دالة الخطر في العمر X وان λ يمثل مقلوب معلمة القياس وان θ هي معلمة الشكل. وعندما تكون الحالة $\theta=1$ تعتمد على معدل فشل الثابت λ.

اما دالة الخطر الثانية فهي تتكون من ثلاث معالم لدالة الخطر لويبل والتي تعمل عندما تكون $X>\gamma$ في المعادلة التالية:

$$h(x) = (\beta/\alpha)((x-y)/\alpha)^{\beta-1}$$

حيث ان γ, α, β تمثل معالم الشكل والقياس والموضع كما في توزيع ويبل ذو الثلاث معالم.

فاذا تم اضافة هاتين الدالتين للخطر فسوف نحصل على توزيع باي ويبل ذو الخمسة معالم وبذلك تكون معادلات الخطر والمعولية كما يلي:

دالة الخطر:

$$h(x) = \lambda\theta(\lambda x)^{\theta-1}, \qquad 0 < x < \gamma$$

$$h(x) = \lambda\theta(\lambda x)^{\theta-1} + (\beta/\alpha)((x-y)/\alpha)^{\beta-1}\ x \geq \gamma$$

وان دالة البقاء

$$S(x) = e^{-(\lambda x)^{\theta}}, \qquad 0 < x < \gamma$$

$$S(x) = e^{-[(\lambda x)^{\theta}+((x-\gamma)/\alpha)^{\beta}]}, \qquad x \geq \gamma$$

فلو استخدمنا المعادلتين الخاصتين بدالة البقاء للباي ويبل $S(x)$ لحساب قيم لـ $S(x)$ ولجميع قيم X من الصفر الى $(\gamma+2\alpha)$ وبعدها تحفظ النتائج في جدول وتولد العدد العشوائي البسيط uniform random variable.

وننظر الى قيم (x) المعتمدة على:

S(x)=R

٤- حالات توزيع ويبل

من خلال الاشكال المدرجة ادناه نرى الاختلاف في منحنى الدالة الاحتمالية p. d. f. لتوزيع ويبل عندما $\omega: \alpha, \beta$ او عندما $\omega: \alpha, \beta, \gamma$ او عندما $\omega: \lambda, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ وكذلك في دالة c. d. f. واخيرا في دالة الخطر للحالات التي ذكرت في توزيع ويبل. ومن خلال هذه الامثلة نلاحظ التغير الذي يحدث في منحنيات الدالة وخاصة في دالة الخطر للباي ويبل والذي يشبه شكل الحوض (*bath tub*) والتي تتعلق بتطبيق المعولية على حالات الفشل الناتجة عن كل من الاستهلاك والاحتراق معا. وان مدى الاشكال التي ياخذها توزيع باي ويبل يكون كبير وذلك لانه ممكن الجمع بين معدلي حالتين من حالات الفشل، فمثلاً الاحتراق والاستهلاك او حالتي العشوائية مع الاستهلاك اوالاحتراق مع العشوائية او العشوائية مع عشوائية اخرى. وفي مرحلة اخرى فان β يجب ان لا يشترط كونها اكثر من واحد. وكذلك فان θ لا يتطلب ان تكون اقل من واحد.

وفي المجالات العملية فان من اهم ميزات توزيع باي ويبل ذو الخمس معالم هو استخدامه لتشخيص بداية الاستهلاك.

وتوضح المنحنيات الاربعة الاولى توزيع ويبل ذو المعلمتين وعندما تكون معلمة القياس $\alpha=1$ في حين تاخذ معلمة الشكل قيم مختلفة كما في الشكل (١). كذلك يطلق على توزيع ويبل ذو المعلمة الواحدة عندما $\alpha=1$.

ويشير الشكل (٢) الى توزيع ويبل ذو الثلاث معالم عندما $\gamma=1$ و $\alpha=2$ و $\beta=2$ والشكل (٣) يشير الى توزيع ويبل ذو الخمسة معالم عندما $\beta=3$ و $\alpha=4$ و $\gamma=4$ و $\theta=0.7$ و $\lambda=0.1$.

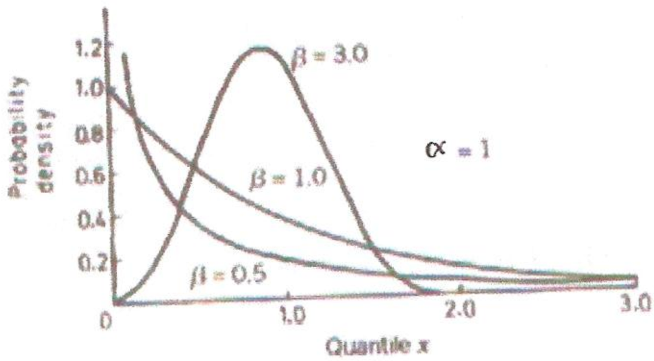
ولذلك نلاحظ التغير الذي يحدث في المنحنيات ففي الاول نرى الحالة التي تمثل التوزيع الاسي، وهكذا لبقية الحالات التي تمثل توزيع رالية والتوزيع المتطرف.

فلو تم اجراء اختبار باخذ عينة مقدارها (١٠) وحدات متماثلة لنفس الوظيفة وبنفس مستويات الجهد ولفترة (١٢٠) ساعة وذلك لغرض حساب عدم المعولية لفترة تشغيل قدرها (٢٢٦) ساعة وحساب فترة الضمان بمعولية *85%* ومن خلال الاختبار فشلت (٦) وحدات للفترات الزمنية التالية:

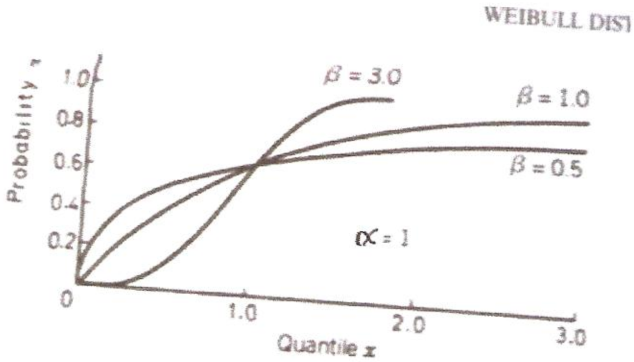
١٢٠ ، ٩٣ ، ٧٥ ، ٥٣، ٣٤، ١٦

في حين استمرت الوحدات الاربعة الباقية بالعمل الى ما بعد (١٢٠) ساعة. وبعد تحليل هذه البيانات باستخدام توزيع ويبل ذو المعلمتين كانت النتائج التالية:

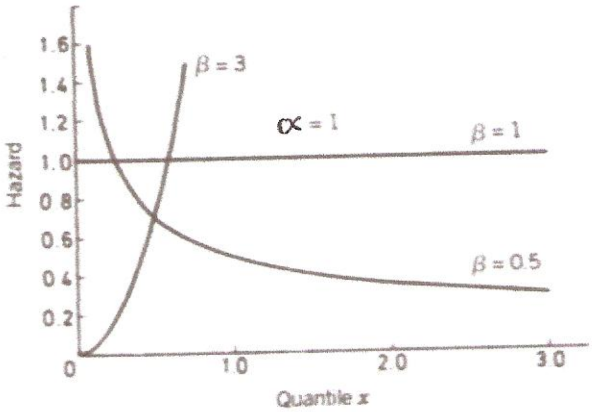
ان معلمة القياس α = ١٤٤.٣٦٣١ وان معلمة الشكل β= ١.٢٠٩٧ وان $\rho=0.99$ ولاستخراج عدم المعولية نستخلص المعلومات من مخطط الاحتمال لتعيين نقاط التقاطع مع الفترة المتوقعة ومن ثم قراءة نقطة عدم المعولية على محور الصادات ويتم احتساب عدم المعولية للوحدات بقيمة *82%*



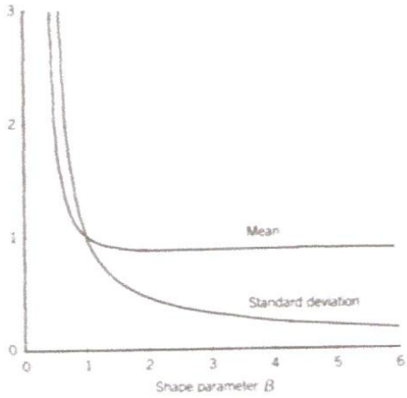
P.d.f. for the weibull variate W:1,β
شكل رقم (1)



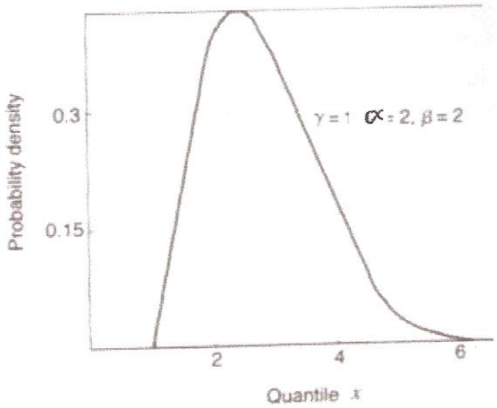
D.F. for the weibull variate W:1,β
شكل رقم (1 أ)



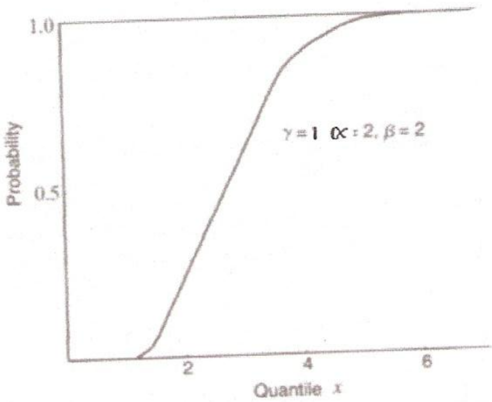
h(X) for the weibull variate W:1,β
شكل رقم (1 ب)



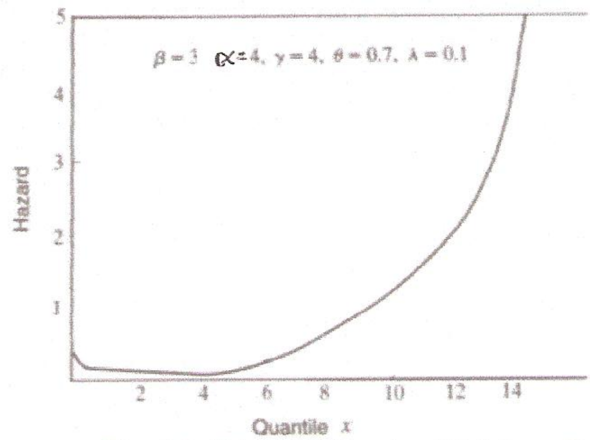
Mean and standard deviation as a function of the shape parameter β
شكل رقم (1 ج)



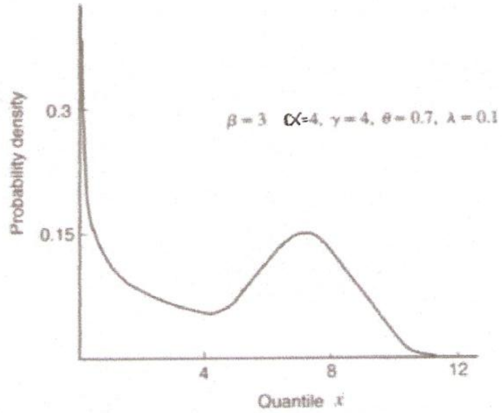
p.d.f. for the weibull variate W:γ,α,β
شكل رقم (2)



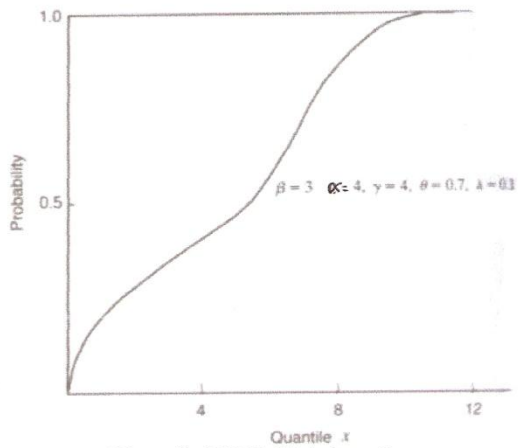
D.F. for the weibull variate W:γ,α,β
شكل رقم (2 أ)



Bi-wiebull hazard function W: λ,θ,γ,α,β
شكل رقم (3)



Bi- weibull p.d.f. W: λ,θ,γ,α,β
شكل رقم (3 أ).



Bi- weibull D.F. W: λ,θ,γ,α,β
شكل رقم (3 ب)

٥- تطبيق في توزيع ويبل

في التجربة العلمية التالية تمت المقارنة بين توزيع ويبل والتوزيع الطبيعي حيث كانت الفكرة هي مطابقة بيانات قوة التحمل للمواد الصلدة (القابلة للتكسر او التشقق) التالية: نتريد السليكون Si_3N_4، كاربيد السليكون SiC واوكسيد الخارصين ZnO لتوزيع ويبل والطبيعي.

لقد شاع استخدام المواد القابلة للتكسر او التشقق مثل السيراميك والصخور والكونكريت وغيرها في الاعمال الهندسية لشدة مقاومتها للحرارة والتاكل والاستهلاك. الا ان هذه المواد قابلة للتشقق او التكسر وان قوة تحملها تختلف من مادة الى اخرى.

ان تقييم المعولية للمواد الصلدة يتطلب معالجة احتمالية. فقد وجد بان توزيع ويبل ذو المعلمتين قد نجح بوصف حالات كثيرة لبيانات التكسر او التشقق وخاصة بالنسبة للمواد الصلدة. وان التوزيع الطبيعي وتوزيع كاوس (Gaussian) يعتبر ان من التوزيعات الاساسية المستخدمة في هذا المجال اضافة الى التوزيعات الاخرى لحالات الفشل والمتمثلة بالتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي وتوزيع القيمة المتطرفة من النوع الاول وغيرها. وبصورة عامة فانه يمكن تشخيص النموذج المناسب باستخدام اختبار حسن المطابقة. وسوف تتم المقارنة بين توزيع ويبل ذو المعلمتين وذو الثلاث معالم والتوزيع الطبيعي على بيانات لهذه المواد السيراميكية.

ان الاحتمال التراكمي للفشل للمادة الصلدة يعتمد على قوة التحمل σ وان توزيع ويبل لقوة التحمل يمكن تمثيله بـ $F(\sigma)$ حيث ان

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left(-[(\sigma - \sigma_{th})/\sigma_o]^m\right)$$

حيث ان

σ_o هي قوة التحمل الطبيعية للمادة.

σ_{th} هي الحد الاعلى لقوة التحمل (الذي لا يظهر دونه أي التكسر)

m هو معامل ويبل

ان معامل ويبل هو قياس لتشتيت قوة التحمل ويعتبر معامل الشكل في التوزيع لذا فان *p. d. f.* لتوزيع ويبل ذو الثلاث معالم هو

$$f(\sigma) = d\,F(\sigma)/d\sigma$$

$$f(\sigma) = \frac{m}{\sigma_o}\left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_o}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_o}\right)^m\right] \dots \dots (1)$$

وان قيمة σ_{th} تكون مساوية للصفر في معظم التطبيقات العملية.

اما اذا تم تصنيع المادة الصلدة بدون عناية كافية فان قوة التحمل ستتمثل بتوزيعات اقل او اكثر تناظراً. ولذلك فقد يكون التوزيع الطبيعي هو الاكثر ملائمة.

وفي هذه الحالة تكون دالة p. d. f. كما يلي:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\alpha}}\, exp\left[-\frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2\alpha^2}\right] \dots \dots \dots (2)$$

حيث ان $\bar{\sigma}$ و α هما المتوسط والانحراف المعياري.

وان افضل طريقة لتقدير المعالم المجهولة هي طريقة الامكان الاعظم (maximum likelihood) والتي تنتج اصغر قيمة لمعالم التغير.

حيث ان الامكان الاعظم .M. L لدالة *p.d.f.* هو

$$L = \Pi_{i=1}^{N} f(\sigma_i)$$

وكذلك فان الدالة اللوغاريتمية لـ .M. L تكون

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln f(\sigma_i)$$

ولذلك فان تقدير المعالم يتم بايجاد الدالة اللوغاريتمية لـ *M. L.* وان المعادلة التالية هي لايجاد ***m*** من ***N*** من قوة التحمل المقاسة σ_i

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{N} \sigma^m \ln \sigma_i}{\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln \sigma_i \quad \ldots \ldots . (3)$$

فيتم استخراج قيمة m بالتجربة والخطأ وبعدها يتم حساب σ_o من المعادلة التالية:

$$\sigma_0^m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^m \ldots \ldots \ldots \ldots . (4)$$

اما بالنسبة للتوزيع الطبيعية فانه معروف لدينا كيفية استخراج $\bar{\sigma}$ و α^2

ان طريقة .M. L تعتبر من افضل الطرق للاستخدام في هذا المجال ويمكن توسيعها لتشمل مقارنة بين النماذج باستخدام اسلوب اكايكي (Akaike information Criterion, AIC) والتي تبدا بربط .M. L مع التغير بين التوزيع الحقيقي والتقديري وبالإمكان عرضها كما يلي:

$$A = -2 \ln \hat{L} + 2K \qquad \ldots \ldots \ldots (5)$$

حيث $\ln \hat{L}$ هو لوغاريتم .M. L لنموذج وهو عدد المعالم المراد مطابقتها للنموذج وان الرقم ٢ هو عامل اضافي. فاذا كان توزيع ويبل ذو الثلاث معالم فان ***K=3*** هو السائد على باقي التوزيعات مثل الطبيعي وويبل ذو المعلمتين ***K=2***، وينبغي ان يبين مطابقة جيدة لقوة التحمل، أي ان:

$$\Delta A = A_n - A_{w3p} \geq 2$$

حيث ان ΔA هو الفرق في قيم *(AIC)* لـ A_n و A_{w3p}

فقد وجد ان اختبار قوة التحمل لثلاث مواد سيراميكية وهي نتريد السليكونSi_3N_4 وكاربيد السليكون SiC واوكسيد الخارصين ZnO لها قوة تحمل ترتبط باحتمال فشل تقديري هو:

$$F(\sigma_i) = (i - 0.5)/N$$

حيث ان i يشير الى النموذج وN العدد الكلي وان p. d. f. المتعلقة بـ σ_{k+1} و σ_k تكون

$$F(\sigma_i) = 1/[N(\sigma_{k+1} - \sigma_k)]$$

والذي يستخدم لمقارنة المطابقة مع الدالة التوزيعية

والجدول التالي يوضح القيم لـN: عدد التجارب للسيراميكSi_3N_4 وSiC وZnO و A_{w2p} الذي يمثل رقم اكايكي لتوزيع ويبل ذو المعلمتين و A_{w3p} الذي يمثل رقم اكايكي في توزيع ويبل ذو الثلاث معالم و A_n الذي يمثل رقم اكايكي في التوزيع الطبيعي وΔA الذي يمثل مقدار الفرق بين التغيرين:

النموذج	$N^{\Delta A}$	A_{w2p}	A_{w3p}	A_n	ΔA
Si_3N_4	٥٥	٦٣٥.٧٨	٦٣٧.٧٧	٦٤٢.٧٨	٧.٠٠
SiC	٧٥	٧٧٨.٣١	٧٧٩.٨٣	٧٧٩.٦٨	١.٣٧
ZnO	١٠٩	٦٨١.٢٩	٦٨٢.٩٠	٦٧١.٥٣	-9.76

وفي الجدول اعلاه نلاحظ نتائج المواد الصلدة مبينة وان توزيع ويبل ذو الثلاث معالم غير مطابق بصورة كبيرة بالرغم من ادخال معلمة جديدة هي معلمة الموضع. حيث لا يمكننا ان نقول انه افضل من توزيع ويبل ذو المعلمتين ولكن على الاقل فان قيم AIC المحتسبة هنا وللحالات الثلاث هي اكبر من الصفر

$$\Delta A = A_{w3p} - A_{w2p} > 0$$

ولذلك فان توزيع ويبل ذو المعلمتين هو افضل من التوزيع الطبيعي فمن الجدول اعلاه نرى ان حالة السيراميك Si_3N_4 تمثل توزيع ويبل افضل تمثيل اما فيما يخص سيراميك ZnO فان سلوكه معاكس تماما وفي حالة سيراميك SiC فيظهر انه يميل الى توزيع ويبل ولكن الفرق ليس كبير بين التوزيعين.

واخيرا تجدر الاشارة الى ان الطريقة المقترحة هنا يمكن تطبيقها لاختيار افضل توزيع بين ثلاثة او اكثر من التوزيعات حيث ناخذ قيم AIC وكما معرفة في (٥) لمعرفة تاثير التحمل ومن ثم تطبيقها قوى التحمل لعدد من المواد المختارة. وقد بينت النتائج لهذه التجربة بانه لا توجد دلائل كافية على ان توزيع ويبل هو دائما افضل من التوزيع الطبيعي او التوزيعات الاخرى الا ان الاستخدام المطلق لتوزيع ويبل على قوة التحمل للمواد الصلدة قد لا يكون دقيقا ما لم تؤخذ العوامل الفيزيائية الاخرى والمرتبطة بالتكسر بنظر الاعتبار.

٦- الاستنتاجات والملاحظات

١- ان عائلة توزيع ويبل تتدرج في مستوى تعقيدها بداية من السالب الاسي والويبل الثنائي المعالم والويبل ذو الثلاث معالم ونهاية بالباي ويبل والويبل ذو الخمسة معالم.
٢- ان السالب الاسي يمثل ابسط انواع توزيع ويبل وتكون دالة الخطر فيه ثابتة.
٣- ان الويبل الثنائي المعالم يضم في نماذجه دوال خطر متناقصة، ثابتة او متزايدة وكما يلاحظ في الشكل (١).
٤- ان نموذج ويبل ذو الثلاث معالم يضيف معلمة الموقع الى نموذج ويبل الثنائي المعالم وتظهر الدالة كما موضح في الشكل (٢).
٥- ان توزيع باي ويبل يسمح بضم اثنان من دوال الخطر المتناقصة، الثابتة او المتزايدة
٦- مما ذكر اعلاه نستنتج ان:

$$\lim_{m\to 0} f(x) = +\infty \qquad \beta < 1$$

$$\lim_{m\to 0} f(x) = 1/\alpha \qquad \beta = 1$$

$$\lim_{m\to 0} f(x) = 0 \qquad \beta > 1$$

٧- عندما تكون $\beta \to +\infty$ فان توزيع ويبل ينحرف (***degenerates***) عند α ولذلك فان دوال ويبل عندما تكون β كبيرة تصبح لها قمة حادة (***sharp peak***)
٨- ان دالة ويبل تاخذ شكلا مشابها الى توزيعات كاما
٩- ان ميزة البقاء لها خاصية

$$P[\omega:(\alpha,\beta) \le \alpha = 1 - e^{-1}] = 0.632121$$

بغض النظر عن قيمة β
١٠- ان متغير ويبل الذي له معلمة الشكل $\beta=1$ يمثل المتغير الاسي وشار له $Exp(1/\alpha)$ وهذا معناه ان

$$w(\alpha,1) \sim Exp(1/\alpha)$$

١١- ان متغير ويبل الذي له معلمة قياس α ومعلمة الشكل $\beta=2$ هو متغير كاي chi (n,σ) عندما $n=2$ و $\sigma = \alpha$ *وهذا معناه*

$$w(\alpha,1) \sim chi(2,\alpha)$$

وهذا ما يسمى بتوزيع راليه $Ray(\alpha)$ او (***Rayleigh Distribution***)
١٢- ان متغير ويبل الذي له معلمة القياس $\alpha\sqrt{2}$ ومعلمة الشكل $\beta=2$ تمثل متغير كاي

chi(n, σ) *عندما* $n=2$ و $\sigma = \alpha\sqrt{2}$

$$w(\alpha\sqrt{2},2) \sim \mathrm{chi}(2,\alpha\sqrt{2})$$

وهذا ايضا يسمى توزيع راليه Ray $(\alpha\sqrt{2})$

١٣- اذا كان X يمثل متغير ويبل $X \sim w(\alpha, \beta)$ فان p. d. f. له تكون

$$Y = -\beta * \ln(x/\alpha)$$
$$F(y) = e^{y} e^{-e^{-y}}$$

وهذه تمثل القيمة المتطرفة (*extreme value*) في توزيع كامبل (*Gumbel Distribution*)

٧- المصادر

1- **Burgher E, Reymen D, Raymen O, Wessa P, "Facilities Development and Design" Resa Corporation, (2004)**
2- **Chunsheng Lu, Robert Danzer, Franz Dieter Fischer, "Fracture Statistics of Brittle Materials: Weibull or Normal Distribution, Physical Review, Vol. 65, 067/02, (2002)**
3- **Devroye L, "Non- Uniform Random Variate Generation", springer-Verlag, New York, (1986).**
4- **Hanagel D, "A Multi- Variate Weibull Distribution", Dept. of Statistics, University of Pune, India, (2004)**
5- **Kapur J. N., Saxena H. C., "Mathematical Statistics" S. Chand & Company Ltd., Ram-Nager, New Delhi 110055, (1978).**
6- **Merran Evans, Nicolas Hasings, Brian Peacock, "Statistical Distributions", John Wiley & Sons, Inc. USA, (2000)**
7- **Patel J. K., Kapadia C. H., Owen D. B. "Hand Book Of Statistical Distributions", Marcel-Dekker, (1976)**
8- **Vijay K., Rohatge, Ehsane Saleh A. K. Md. "An Introduction to probability and Statistics", 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., Canada, (2000).**