# Comparison between maximum likelihood and white method for estimation the survival function by using simulation

# مقارنة بين طريقة الامكان الاعظم وطريقة وايت لتقدير دالة البقاء باستخدام المحاكاة

أ.د.عبد الحسين حسن حبيب الطائي أثير عبد الزهرة كريم
جامعة كربلاء/ كلية الادرة والاقتصاد / قسم الاحصاء
بحث مستل من رسالة ماجستير في الاحصاء

**المستخلص**

من المعلوم ان دراسة وتحليل دوال البقاء ومؤشراتها تعتبر ضرورة لتحديد ماهية وقيمة هذه الدوال ومؤشراتها اذ يجب البحث عن طرائق تقدير جيدة ودقيقة بحيث يكون فيها متوسط مربعات الخطأ (أو اي مقايس احصائية اخرى لها علاقة بالاختبار) اقل ما يمكن.

من هنا تضمنت هذا البحث دراسة وتحليل دوال البقاء ومؤشراتها باستخدام طريقة الامكان الاعظم وطريقة وايت لأيجاد افضل تقدير لدالة البقاء و استخدام المحاكاة حيث تبين ان طريق الامكان الاعظم هي الافضل لانها حققت اقل MSE وطريقة وايت تكون اقل كفائه في تقدير دالة البقاء.

**Abstract**

It is known that the study and analysis of survival functions and a ccurate Therefore ,it must search for good method of estimation with small Mean Square Error (MSE) or any other Test statisticas possible.

Hence, this thesis consist of studying and analyzing the survival functions and there indicators by using maximum likelihood method and white method so is the use of The simulation results showed that the maximum likelihood is the best and white method is the less efficient in estimation

## 1-المقدمة

من المعلوم ان هنالك اهتماما متزايدا من قبل الباحثين والكتاب بموضوع دوال البقاء لما له من أهمية كبيرة في دراسة معدل زمن واحتمال بقاء الكائن الحي بعد مدة محدده من الزمن (t)، ودوال البقاء تعد من الدوال المهمة في علم الأحصاء الذي له دور أساسي في تحليل معظم الظواهر اعتمادا على البيانات والمعلومات الأحصائيه المتوفرة عن تلك الظاهرة،

لقد اهتم العديد من الباحثين بدراسة موضوع دوال البقاء منهم (Charles)،(Harold)،(Lewis)(Pugh)،حتى اصبحت هذه الدراسات مقررات دراسية لمختلف ان دراسة تحليل دوال البقاء تعتمد على بيانات المراقبة حيث ان موضوع بيانات المراقبة ومجال استعمالها من الموضوعات التي تأخذ حيزا كبيرا ضمن الدراسات والبحوث والتطبيقات العلمية الأخرى لذا في هذا البحث سيتم تقدير وتحليل دوال البقاء وبعض مؤشراتها التي لها العلاقة ببيانات المراقبة.

## 2-هدف البحث

يهدف هذا البحث الى

1- تقدير دالة البقاء وبعض مؤشراتها عندما يتناسب معامل الخطورة (دالة المخاطرة ) مع الزمن من خلال تحديد التوزيع الاحصائي الملائم.

2- تقدير دالة البقاء وبعض مؤشراتها باستخدام طريقة الامكان الاعظم وطريقة وايت

3- ايجاد افضل طريق للتقدير من خلال استخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE)

3-الجانب النظري

1-دالة البقاء( Survival function)[1][6]

وتعرف دالة البقاء بأنها احتمال بقاء كائن ما حياً بعد مرور الزمن t ،ويرمز لها بالرمز s(t) ان مصطلح دالة البقاء في يستعمل بشكل واسع الدراسات الطبية والحياتية. ويمكن التعبير عنها رياضيا:

$$S(t) = Pr(T > t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

و من خصائص دالة البقاء انها دالة متناقصة بعبارة أن

$$s(t \to \infty) = 0 \quad , \quad s(t=0)=1$$

2-دالة المخاطرة (معامل الخطورة)(Hazard function) (h(t)

يعرف معامل الخطورة (دالة المخاطرة ) بانه احتمال فشل المفردة خلال المدة $(t, t + \Delta t)$، علماً أن المفردة لم تفشل حتى الوقت t وهذا يعني أن معامل الخطورة إحتمال شرطي. ويرمز لمعامل الخطوة بالرمز $h(t)$، وان معامل الخطورة هو صيغة محددة لمدة الأخفاق او الفشل وهذه المدة محصورة بين وقتين هما $t_1, t_2$ اذ يمكن التعبير عن $t_2$ ب$t_1 + \Delta t_2$ وبذلك تكون الدالة الاحتمالية الشرطية للمفردة عند الوقت t هي :

$$\Pr(t < T \le t + \Delta t \backslash T > t) = \frac{\Pr(t < T \le t + \Delta t)}{\Pr(T > t)} \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

باسلوب رياضي احصائي نحصل على الصيغة التالية:

$$h(t) = \frac{f(t)}{s(t)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ان تحديد التوزيع الاحصائي الملائم في الطرائق المعلمية ضروري جدا للتحليل لذلك لابد من استخدام العلاقة بين دالة الخطورة (معامل الخطورة) والزمن لاشتقاق التوزيع الاحصائي الملائم ، ومن المعلوم ان معامل الخطورة يتناسب طرديا مع الزمن حيث كلما يزداد الزمن يزداد معامل الخطورة اي ان

$$h(t) \propto t^c$$

حيث c كمية ثابته

ومن خلال هذا التناسب يتبين لنا ان التوزيع الاحصائي الملائم هو توزيع ويبل

3-توزيع ويبل (Weibull Distribution) [4]

توزيع ويبل هو احد التوزيعات المستمرة واحد نماذج الفشل الشائعة الاستعمال وفي السنوات الأربعين الماضية كان لتوزيع ويبل مكان وأهمية في حقل المعولية واختبار الحياة وقد وضح هذا التوزيع من لدن تيبت فيشر (Tippet Fisher) عام 1928 كتوزيع ثالث تقريبي للقيم المتطرفة وفي عام 1939 توصل العالم السويدي (waloddi weibull) الى هذا التوزيع.

الدالة الاحتمالية لتوزيع ويبل هي

$$f(t,k,\lambda) = \frac{\lambda}{k} t^{\lambda-1} e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}$$

k: معلمة القياس (Scale Parameter).

λ: معلمة الشكل (Shape Parameter).

وان الدالة التجميعية (c.d.f)لتوزيع ويبل ذي المعلمتين يعبر عنها بالصيغة الرياضية الأتية

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}$$

اما دالة البقاء لتوزيع ويبل هي $s(t) = e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}$

4-طرائق التقدير

1- طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method [5][3]

تعد طريقة الإمكان الأعظم من طرائق التقدير الرئيسة إذ تعد إحدى أهم طرائق التقدير وأكثرها إستعملا لتقدير معلمات النماذج، وتحقيقا لمبدأ هذه الطريقة والذي يكمن في إيجاد تقدير المعلمات الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى

نفرض ان t متغير الزمن يتوزع توزيع ويبل بمعلمتين k،λ والبيانات التي يتم الحصول عليها هي بيانات مراقبة من النوع الأول فأن دالة الامكان الاعظم (L) هي

$$L = \frac{n!}{(n-m)}\prod_{i=1}^{m} f(t_i)[s(t_0)^{n-m} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

$$L(\lambda, k, t_1, \dots\dots, t_m) = \frac{n!}{(n-k)!}[\pi f(t_i)][s(t_0)]^{n-m}$$

$$L = (\lambda, k; t_1, \dots\dots, t_m) = \frac{n!}{)n-m)!}\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\lambda}{k}t^{\lambda-1}\,e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}\right][s(t_0)]^{n-m} \dots . (5)$$

وبما أن دالة البقاء لتوزيع ويبل هي

$$s(t) = e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}$$

وبتعويض قيمة دالة البقاء في المعادلة *(5)*

$$L = (\lambda, k; t_1, \dots\dots, t_m) = \frac{n!}{)n-m)!}\,\frac{\lambda^m}{k^m}\prod_{i=1}^{m} t^{\lambda-1}\,e^{-\frac{[\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda} + (n-m)t_0^{\lambda})}{k}} \dots (6)$$

1. في حالة معلمة الشكل ( $\lambda$ ) معلومة :- Shape Parameter Known

$$L(\lambda, k; t_1, \dots\dots, t_m) = \frac{n!}{)n-m)!}\,\frac{\lambda^m}{k^m}\prod_{i=1}^{m} t^{\lambda-1}\,e^{-\frac{[\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda} + (n-m)t_0^{\lambda})}{k}} \dots (7)$$

وباخذ $Ln$ لطرفي المعادلة ينتج :

$$\ln L = \ln\frac{n!}{(n-m)!} + m\ln\lambda - m\ln k + \lambda\sum_{i=1}^{m}\ln t_i - \sum_{i=1}^{m}\ln t_i - \frac{[\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda} + (n-m)t_0^{\lambda}]}{k}$$

وبأخذ المشتقة الأولى ل $k$ ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$\frac{\mathrm{d}\ln \mathrm{L}}{\mathrm{dk}} = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}} + \frac{[\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda} + (n-m)t_0^{\lambda}]}{k^2} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots . . (8)$$

$$\hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda} + (n-m)t_0^{\lambda}}{m} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

2- في حالة معلمة الشّكل ( $\lambda$ )غير معلومة:-Shape Parameter Unknown

وبأخذ $Ln$ لطرفين واخذ المشتقة بالنسبة ل$\lambda$, $k$ للمعادلة *(8)*ومساواتها بالصفر ينتج:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\lambda} = \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^{m}\ln t_i - \frac{\left[\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda}\ln t_i + (n-m)\ln t_0^{\lambda}\right]}{k} = 0$$

نحصل على تقدير كل من $k,\lambda$ وكالأتي :

$$\frac{m}{\hat{\lambda}} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{m} t_i^{\lambda}\ln t_i + (n-m)t_0^{\lambda}\ln t_0\right]}{k} - \sum_{i=1}^{m}\ln t_i \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

وبالتعويض عن قيمة k في معادلة (10) نحصل على قيمة λ :

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{M} t_i^{\lambda}\ln t_i+(n-m)t_m^{\lambda}\ln t_m}{\sum_i^m t_i^{\lambda}+(n-m)t_m^{\lambda}}-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln t_i \dots\dots\dots.(11)$$

ولصعوبة حل المعادلتين بالطرائق الإعتيادية سوف نستعمل طريقة نيوتن- رافسون [3] (Newton-Raphson Method)، للحصول على مقدر الامكان الأعظم للمعلمات $k,\lambda$

$$\hat{p}_{j+1}=\hat{p}_j-\frac{g(\hat{p}_j)}{g'(\hat{p}_j)}.$$

حيث أن $g(\hat{p}_j)$ تمثل المعادلات

$$\frac{m}{\hat{\lambda}}+\sum_{i=1}^{m}\ln t_i-\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}\ln t_i+(n-m)t_0^{\lambda}\ln t_0\right]}{k}=0$$

$$-\frac{m}{\hat{k}}+\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}t_i^{\lambda}+(n-m)t_0^{\lambda}\right]}{\hat{k}^2}=0$$

أما $g'(\hat{p}_j)$ تمثل المشتقات الجزئية لهاتين المعادلتين

اذ أن :

$$g'(\hat{p})=\frac{\partial g(\hat{p}_j)}{\partial(\hat{p}_j)}$$

.

حيث أن :

$$\underline{\hat{p}}=\begin{bmatrix}\hat{\lambda}\\ k\end{bmatrix}$$

وبعد الحصول على قيم المعالم $\hat{\lambda},\hat{k}$ يمكن الحصول على الدالة التجمعية $F(t)$

$$F(t)=1-e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}$$

$$s(t)=e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}}=1-F(t)$$

وبأخذ (Ln) لطرفي المعادلة:

$$-\frac{t^{\lambda}}{k}=\ln(1-F(t))$$

$$\frac{t^{\lambda}}{k}=-\ln(1-F(t))$$

وباخذ (Ln) لطرفي المعادلة :

$$\lambda\ln t-\ln k=\ln[-\ln(1-F(t))]$$

$$\lambda\ln t=\ln k+\ln[-\ln(1-F(t))]$$

$$\ln t=\frac{\ln k}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\ln[-\ln(1-F(t))]\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(12)$$

وعلى فرض ان

$$Y=Lnt$$

$$\left.\begin{aligned} X &= Ln\left[-Ln\,(1-F(t))\right] \\ k_{\circ} &= \frac{Lnk}{\lambda} \\ k_1 &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

وبمقارنة المعادلة مع معادلة الأنحدار الخطي البسيط فإن:

$$Y = k_{\circ} + k_1\,X + e_i \qquad ,i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

اذ أنّ $e_i$ يمثل الخطأ العشوائي

وإنّ مقدرات المربعات الصغرى يمكن الحصول عليها من المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} K_{\circ} &= \bar{Y} - K_1\,\bar{X} \\ K_1 &= \frac{\sum X\,Y - n\,\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n\,\bar{X}^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

ومن ثم يمكننا الحصول على مقدرات توزيع ويبل من العلاقات التالية:

$$K_1 = \frac{1}{\hat{\lambda}} \qquad , \qquad K_{\circ} = \frac{LnK}{\hat{\lambda}}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{1}{K_1} \\ K &= e^{-\frac{K_{\circ}}{K_1}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

وبذلك نحصل على تقديرات ML k,λ

وبالتعويض فان مقدر الامكان الاعظم لدالة البقاء يكون

$$\hat{s}(t) = e^{-\frac{t^{\lambda}}{k}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

2- طريقة وايت White's method [2]

تعتمد الفكرة الأساسية لهذه الطريقة على دالة التجمعية (c.d.f) المبينـة فـي المعادلـة رقم (2-2) في صياغة أنموذج أنحدار خطي بسيط وكما يأتي:

$$F(t) = 1 - e^{\frac{-t^{\lambda}}{k}}$$

$$s(t) = e^{\frac{-t^{\lambda}}{k}}$$

وبذلك فان معكوس دالة البقاء $s(t)^{-1}$ سيكون $\frac{1}{e^{\frac{-t^{\lambda}}{k}}}$ بعباره اخرى ان

$$\ln\left\{\ln\left[\frac{1}{s(t)}\right]\right\} = \ln\frac{1}{k} + \lambda\ln t_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

ولنفرض $T = \ln \quad_i\ , b = \lambda\,,\ a = \ln\frac{1}{k}\ \ ,Y_i = \ln\left\{\ln\left[\frac{1}{s(t)}\right]\right\}$

وبذلك تم الحصول على أنموذج أنحدار خطي هو:

$$Y_i = a + bT_i + e_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

إذ ان $e_i$ يمثل حد الخطأ

$i = 1,2,\ldots\ldots,n$

وبأستعمال طريقة المربعات الصغرى (OLS) فإن:

$$\hat{b}_{Ls} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i T_i - \frac{\sum_1^n T_i \sum_1^n y_i}{n}}{\sum_1^n T_i^{\,2} - \frac{\left(\sum T_i\right)^2}{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

$$y_i^{\wedge} = a^{\wedge} + b^{\wedge} T_i$$

ويمكن استخراج قيمة a من المعادلة الاتية

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{T}$$

ويمكن الحصول $\lambda^{\wedge}$ و $k^{\wedge}$ كما يأتي :

$$\left.\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \hat{b}_{LS} \\ k^{\wedge} &= e^{-a^{\wedge} ls} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

ومن ثم فإن مقدر الـ White لدالة البقاء $\hat{s}(t)$ يكون:

$$S^{\wedge}(t) = \exp\left\{-e^{y^{\wedge}}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

الجانب التجريبي

لغرض المقارنة بين الطريقتن جرى استعمال أسلوب المحاكاة (*Simulation*) بغية محاكاة عدد كبير جدا من الحالات التي يمكن مواجهتها في الواقع العملي بهدف الوصول لنتائج أكثر شمولية.

ولبيان أفضلية طرائق معينة يؤدي إلى اللجوء إلى تجارب المحاكاة اذ أنها تتيح للباحث اختيار حجوم عينات مختلفة مع حالات متنوعة لتوزيع الأخطاء العشوائية وتكرار التجربة مرات عدة ولجميع الطرائق المستعملة بهدف التوصل إلى الطريقة المثلى. وكان العامل الأهم للاستعمال الواسع لأساليب المحاكاة هو تطور الحاسوب في العقود الأخيرة.

حيث يتم توليد الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم للفترة (0,1) ، عن طريق استعمال دالة الكثافة التجميعية التي تصف الأنموذج x=F(x) ولتحويل الاعداد العشوائية الى بيانات تتبع توزيع ويبل ذي المعلمتين باسلوب رياضي احصائي نحصل على الصيغة التالية:

$$x = -[k \ln(1-U)]^{\frac{1}{\lambda}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

مراحل المحاكاة

1- تحديد القيم الافتراضية

تم تحديد حجمين للعينة (n=25, 50) وحجمين لقيم المبتورة (m=10, 20) اما قيم المعلمات فكانت قيمة معلمة الشكل (λ=35,70) ومعلمة القياس (k=1.6,2.6)

2-مرحلة المقارنه

وهي المقارنة بين طرائق التقدير ، اذ تم استعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE)

$$MSE\left(\hat{S}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(\hat{S}(t) - S(t))^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

$$i = 1, \ldots\ldots\ldots M$$

حيث أن L :تمثل عدد المكررات (Replications) لكل تجربة .

مناقشة نتائج المحاكاة :

في هذا المبحث سيتم عرض وتحليل نتائج المحاكاة لتقدير دالة البقاء بالطرائق المعلمية وقد تم الحصول على هذا النتائج بالاعتماد على برنامج كتب بلغة (Matlab) وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها وكما يأتي :

**الجدول رقم (1)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=25)**

| $n_1$ | m | $\lambda_1$ | $k_1$ | $t_i$ | s(t) | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 35 | 1.6 | 0.8791 | 0.9590 | 0.9864 | 0.9306 |
| | | | | 0.9024 | 0.9199 | 0.9645 | 0.8371 |
| | | | | 0.9134 | 0.8795 | 0.9343 | 0.7153 |
| | | | | 0.9249 | 0.8433 | 0.9023 | 0.5931 |
| | | | | 0.9576 | 0.8020 | 0.8616 | 0.4669 |
| | | | | 0.9597 | 0.7654 | 0.8232 | 0.3670 |
| | | | | 0.9660 | 0.7310 | 0.7847 | 0.2813 |
| | | | | 0.9674 | 0.6923 | 0.7386 | 0.1981 |
| | | | | 0.9696 | 0.6527 | 0.6918 | 0.1337 |
| | | | | 0.9905 | 0.6133 | 0.6440 | 0.0899 |

بالنظر الى الجدول رقم (1) نلحظ ان قيم عمود $(t_i)$ تمثل وقت الفشل وهي قيم اخر تجربه (L=1000) وهي في تزايد اما قيم الأعمدة الأخرى تمثل قيم دالة البقاء $s(t)$ الحقيقية (الأفتراضية) والتقديرية وهي عبارة عن وسط حسابي لقيم دالة البقاء لجميع التجارب ال(1000) وهي في تناقص ونلحظ كلما يزداد وقت الفشل تقل دالة البقاء ولمعرفة افضل طريقة تقدير يتم اللجوء الى MSE .

**الجدول رقم (2)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء**

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.0017 | 0.0041 | ml |
| 0.0035 | 0.0136 | ml |
| 0.0056 | 0.0342 | ml |
| 0.0070 | 0.0730 | ml |
| 0.0077 | 0.1239 | ml |
| 0.0078 | 0.1698 | ml |
| 0.0077 | 0.2185 | ml |
| 0.0074 | 0.2535 | ml |
| 0.0070 | 0.2802 | ml |
| 0.0067 | 0.2851 | ml |

قيم اعمدة الجدول (2) هي عباره عن قيم الوسط الحسابي لقيم MSE لجميع التجارب (1000) وهذ الكلام يمثل جميع جداول MSEالتي سوف يتم ايجادها لاحقا

ظهرت نتائج الجدول رقم (2) ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

الجدول رقم (3)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية

| $n_1$ | m | $\lambda_1$ | $k_2$ | $t_i$ | s(t) | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 35 | 2.6 | 0.8760 | 0.9634 | 0.9841 | 0.9284 |
| | | | | 0.8978 | 0.9247 | 0.9563 | 0.8307 |
| | | | | 0.9442 | 0.8888 | 0.9217 | 0.7176 |
| | | | | 0.9549 | 0.8510 | 0.8820 | 0.5940 |
| | | | | 0.9601 | 0.8085 | 0.8336 | 0.4720 |
| | | | | 0.9736 | 0.7696 | 0.7839 | 0.3638 |
| | | | | 0.9761 | 0.7308 | 0.7346 | 0.2739 |
| | | | | 0.9871 | 0.6929 | 0.6849 | 0.1973 |
| | | | | 0.9933 | 0.6546 | 0.6340 | 0.1361 |
| | | | | 0.9949 | 0.6163 | 0.5827 | 0.0928 |

الجدول رقم (4)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.00186 | 0.00335 | ml |
| 0.00411 | 0.01244 | ml |
| 0.00611 | 0.03257 | ml |
| 0.00752 | 0.07225 | ml |
| 0.00821 | 0.11787 | ml |
| 0.00846 | 0.16453 | ml |
| 0.00843 | 0.20957 | ml |
| 0.00817 | 0.25090 | ml |
| 0.00792 | 0.27626 | ml |
| 0.00767 | 0.28302 | ml |

ظهرت نتائج الجدول رقم (4) ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

**الجدول رقم (5)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=25)**

| $n_1$ | m | $\lambda_2$ | $k_1$ | $t_i$ | s(t) | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ | $\hat{s}_{sh(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 70 | 1.6 | 0.9730 | 0.9544 | 0.9853 | 0.9264 | 0.9658 |
| | | | | 0.9822 | 0.9138 | 0.9625 | 0.8269 | 0.9088 |
| | | | | 0.9833 | 0.8765 | 0.9352 | 0.7120 | 0.8975 |
| | | | | 0.9892 | 0.8377 | 0.9019 | 0.5879 | 0.8158 |
| | | | | 0.9893 | 0.8011 | 0.8662 | 0.4782 | 0.8136 |
| | | | | 0.9893 | 0.7645 | 0.8268 | 0.3754 | 0.8133 |
| | | | | 0.9913 | 0.7241 | 0.7822 | 0.2775 | 0.7740 |
| | | | | 1.0003 | 0.6830 | 0.7339 | 0.1916 | 0.5080 |
| | | | | 1.0006 | 0.6450 | 0.6880 | 0.1298 | 0.4987 |
| | | | | 1.0010 | 0.6074 | 0.6406 | 0.0882 | 0.4836 |

**الجدول رقم (6)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء**

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{sh(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|---|
| 0.00173 | 0.00357 | 0.00110 | ml |
| 0.00401 | 0.01334 | 0.00328 | ml |
| 0.00581 | 0.03373 | 0.00672 | ml |
| 0.00711 | 0.07194 | 0.00804 | ml |
| 0.00768 | 0.11870 | 0.01313 | ml |
| 0.00780 | 0.16588 | 0.01117 | ml |
| 0.00758 | 0.21294 | 0.00351 | ml |
| 0.00725 | 0.25327 | 0.00173 | ml |
| 0.00677 | 0.27811 | 0.00115 | ml |
| 0.00633 | 0.28378 | 0.00005 | ml |

ظهرت نتائج الجدول رقم (6) ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

**الجدول رقم (7)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=25)**

| $n_1$ | m | $\lambda_2$ | $k_2$ | $t_i$ | s(t) | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 70 | 2.6 | 0.9804 | 0.9592 | 0.9833 | 0.9242 |
| | | | | 0.9825 | 0.9253 | 0.9590 | 0.8316 |
| | | | | 0.9869 | 0.8889 | 0.9259 | 0.7146 |
| | | | | 0.9885 | 0.8494 | 0.8824 | 0.5850 |
| | | | | 0.9903 | 0.8105 | 0.8375 | 0.4739 |
| | | | | 0.9930 | 0.7734 | 0.7919 | 0.3740 |
| | | | | 0.9955 | 0.7292 | 0.7350 | 0.2725 |
| | | | | 0.9990 | 0.6922 | 0.6840 | 0.1949 |
| | | | | 1.0038 | 0.6531 | 0.6307 | 0.1342 |
| | | | | 1.0040 | 0.6175 | 0.5826 | 0.0954 |

**جدول(8)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء**

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.00131 | 0.00382 | ml |
| 0.00245 | 0.01302 | ml |
| 0.00313 | 0.03392 | ml |
| 0.00315 | 0.07109 | ml |
| 0.00299 | 0.11882 | ml |
| 0.00290 | 0.16580 | ml |
| 0.00313 | 0.21215 | ml |
| 0.00362 | 0.25288 | ml |
| 0.00473 | 0.27480 | ml |
| 0.00644 | 0.27887 | ml |

ظهرت نتائج الجدول رقم (8) ان الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

الجدول رقم (9)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=50)

| $n_2$ | $m_2$ | $\lambda_1$ | $k_1$ | $t_i$ | $s(t)$ | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 20 | 35 | 1.6 | 0.9320 | 0.9820 | 0.9920 | 0.9706 |
| | | | | 0.9400 | 0.9651 | 0.9822 | 0.9354 |
| | | | | 0.9405 | 0.9458 | 0.9694 | 0.8893 |
| | | | | 0.9443 | 0.9257 | 0.9542 | 0.8350 |
| | | | | 0.9453 | 0.9062 | 0.9381 | 0.7760 |
| | | | | 0.9531 | 0.8865 | 0.9205 | 0.7123 |
| | | | | 0.9537 | 0.8677 | 0.9034 | 0.6522 |
| | | | | 0.9560 | 0.8477 | 0.8843 | 0.5891 |
| | | | | 0.9576 | 0.8290 | 0.8657 | 0.5322 |
| | | | | 0.9639 | 0.8089 | 0.8448 | 0.4742 |
| | | | | 0.9732 | 0.7888 | 0.8237 | 0.4178 |
| | | | | 0.9754 | 0.7697 | 0.8033 | 0.3678 |
| | | | | 0.9770 | 0.7504 | 0.7825 | 0.3213 |
| | | | | 0.9779 | 0.7332 | 0.7632 | 0.2824 |
| | | | | 0.9791 | 0.7132 | 0.7408 | 0.2400 |
| | | | | 0.9850 | 0.6915 | 0.7161 | 0.1988 |
| | | | | 0.9879 | 0.6717 | 0.6933 | 0.1655 |
| | | | | 0.9906 | 0.6520 | 0.6704 | 0.1368 |
| | | | | 0.9910 | 0.6321 | 0.6473 | 0.1121 |
| | | | | 0.9921 | 0.6133 | 0.6253 | 0.0926 |

الجدول رقم (10)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.00039 | 0.00072 | ml |
| 0.00103 | 0.00235 | ml |
| 0.00170 | 0.00538 | ml |
| 0.00232 | 0.01062 | ml |
| 0.00288 | 0.01876 | ml |
| 0.00334 | 0.03095 | ml |
| 0.00373 | 0.04715 | ml |
| 0.00404 | 0.06699 | ml |
| 0.00423 | 0.08844 | ml |
| 0.00434 | 0.11232 | ml |
| 0.00436 | 0.13566 | ml |
| 0.00432 | 0.15904 | ml |
| 0.00426 | 0.18140 | ml |
| 0.00415 | 0.20382 | ml |
| 0.00403 | 0.22412 | ml |
| 0.00389 | 0.23998 | ml |
| 0.00372 | 0.25391 | ml |
| 0.00360 | 0.26341 | ml |
| 0.00346 | 0.26872 | ml |
| 0.00331 | 0.27075 | ml |

ظهرت نتائج الجدول رقم (10) ان طريقة الأمكان الأعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

**الجدول رقم (11)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=50)**

| $n_2$ | $m_2$ | $\lambda_1$ | $k_1$ | $t_i$ | $s(t)$ | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 20 | 35 | 2.6 | 0.8786 | 0.9814 | 0.9923 | 0.9754 |
| | | | | 0.9081 | 0.9590 | 0.9783 | 0.9316 |
| | | | | 0.9233 | 0.9397 | 0.9644 | 0.8884 |
| | | | | 0.9541 | 0.9199 | 0.9483 | 0.8382 |
| | | | | 0.9581 | 0.8986 | 0.9290 | 0.7769 |
| | | | | 0.9612 | 0.8769 | 0.9081 | 0.7134 |
| | | | | 0.9624 | 0.8567 | 0.8874 | 0.6505 |
| | | | | 0.9628 | 0.8372 | 0.8666 | 0.5909 |
| | | | | 0.9662 | 0.8168 | 0.8439 | 0.5296 |
| | | | | 0.9683 | 0.7984 | 0.8229 | 0.4770 |
| | | | | 0.9703 | 0.7788 | 0.7995 | 0.4228 |
| | | | | 0.9765 | 0.7575 | 0.7741 | 0.3676 |
| | | | | 0.9815 | 0.7386 | 0.7509 | 0.3216 |
| | | | | 0.9884 | 0.7181 | 0.7259 | 0.2752 |
| | | | | 0.9886 | 0.6989 | 0.7019 | 0.2350 |
| | | | | 0.9891 | 0.6800 | 0.6781 | 0.1995 |
| | | | | 0.9938 | 0.6613 | 0.6547 | 0.1685 |
| | | | | 0.9961 | 0.6411 | 0.6296 | 0.1390 |
| | | | | 0.9967 | 0.6223 | 0.6053 | 0.1149 |
| | | | | 0.9972 | 0.6030 | 0.5805 | 0.0937 |

الجدول رقم (12)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.00034 | 0.00067 | ml |
| 0.00080 | 0.00252 | ml |
| 0.00112 | 0.00547 | ml |
| 0.00135 | 0.01109 | ml |
| 0.00155 | 0.02019 | ml |
| 0.00167 | 0.03279 | ml |
| 0.00173 | 0.04814 | ml |
| 0.00171 | 0.06884 | ml |
| 0.00164 | 0.08826 | ml |
| 0.00158 | 0.10999 | ml |
| 0.00150 | 0.13486 | ml |
| 0.00148 | 0.16086 | ml |
| 0.00149 | 0.18433 | ml |
| 0.00160 | 0.20703 | ml |
| 0.00174 | 0.22798 | ml |
| 0.00188 | 0.24564 | ml |
| 0.00206 | 0.25931 | ml |
| 0.00246 | 0.26862 | ml |
| 0.00300 | 0.27537 | ML |
| 0.00362 | 0.27681 | sh |

ظهرت نتائج الجدول رقم (12) ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

الجدول رقم (13)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=50)

| $n_2$ | $m_2$ | $\lambda_2$ | $k_1$ | $t_i$ | $s(t)$ | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 20 | 70 | 1.6 | 0.9682 | 0.9782 | 0.9922 | 0.9717 |
| | | | | 0.9729 | 0.9574 | 0.9816 | 0.9328 |
| | | | | 0.9734 | 0.9383 | 0.9692 | 0.8863 |
| | | | | 0.9765 | 0.9163 | 0.9531 | 0.8264 |
| | | | | 0.9797 | 0.8972 | 0.9383 | 0.7701 |
| | | | | 0.9828 | 0.8773 | 0.9214 | 0.7073 |
| | | | | 0.9836 | 0.8578 | 0.9040 | 0.6462 |
| | | | | 0.9846 | 0.8397 | 0.8870 | 0.5888 |
| | | | | 0.9864 | 0.8245 | 0.8722 | 0.5409 |
| | | | | 0.9869 | 0.8034 | 0.8508 | 0.4795 |
| | | | | 0.9891 | 0.7843 | 0.8309 | 0.4263 |
| | | | | 0.9891 | 0.7655 | 0.8107 | 0.3756 |
| | | | | 0.9905 | 0.7451 | 0.7885 | 0.3238 |
| | | | | 0.9912 | 0.7242 | 0.7651 | 0.2746 |
| | | | | 0.9917 | 0.7065 | 0.7448 | 0.2360 |
| | | | | 0.9918 | 0.6868 | 0.7217 | 0.1974 |
| | | | | 0.9919 | 0.6683 | 0.6999 | 0.1650 |
| | | | | 0.9933 | 0.6481 | 0.6759 | 0.1336 |
| | | | | 0.9949 | 0.6279 | 0.6519 | 0.1080 |
| | | | | 0.9971 | 0.6102 | 0.6306 | 0.0899 |

الجدول رقم (14)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.00039 | 0.00073 | Ml |
| 0.00100 | 0.00250 | Ml |
| 0.00158 | 0.00552 | Ml |
| 0.00218 | 0.01093 | Ml |
| 0.00268 | 0.01929 | Ml |
| 0.00319 | 0.03153 | Ml |
| 0.00358 | 0.04819 | Ml |
| 0.00388 | 0.06766 | Ml |
| 0.00408 | 0.08893 | Ml |
| 0.00419 | 0.11110 | Ml |
| 0.00427 | 0.13528 | Ml |
| 0.00425 | 0.15955 | Ml |
| 0.00421 | 0.18358 | Ml |
| 0.00416 | 0.20561 | Ml |
| 0.00408 | 0.22551 | Ml |
| 0.00398 | 0.24244 | Ml |
| 0.00386 | 0.25652 | Ml |
| 0.00375 | 0.26696 | Ml |
| 0.00365 | 0.27242 | Ml |
| 0.00356 | 0.27360 | Ml |

ظهرت نتائج الجدول رقم (14)ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

**الجدول رقم (15)قيم دالة البقاء (survival) الحقيقية والتقديرية عندما (n=50)**

| $n_2$ | $m_2$ | $\lambda_2$ | $k_2$ | $t_i$ | $s(t)$ | $\hat{s}_{ml(t_i)}$ | $\hat{s}_{white(t_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 20 | 70 | 2.6 | 0.9383 | 0.9832 | 0.9924 | 0.9747 |
| | | | | 0.9482 | 0.9646 | 0.9813 | 0.9405 |
| | | | | 0.9490 | 0.9451 | 0.9661 | 0.8921 |
| | | | | 0.9658 | 0.9230 | 0.9477 | 0.8341 |
| | | | | 0.9661 | 0.9034 | 0.9296 | 0.7765 |
| | | | | 0.9737 | 0.8839 | 0.9102 | 0.7157 |
| | | | | 0.9802 | 0.8650 | 0.8906 | 0.6543 |
| | | | | 0.9811 | 0.8431 | 0.8668 | 0.5857 |
| | | | | 0.9833 | 0.8234 | 0.8447 | 0.5261 |
| | | | | 0.9844 | 0.8029 | 0.8212 | 0.4675 |
| | | | | 0.9877 | 0.7834 | 0.7982 | 0.4153 |
| | | | | 0.9901 | 0.7649 | 0.7763 | 0.3683 |
| | | | | 0.9905 | 0.7453 | 0.7528 | 0.3209 |
| | | | | 0.9921 | 0.7258 | 0.7291 | 0.2768 |
| | | | | 0.9927 | 0.7069 | 0.7060 | 0.2385 |
| | | | | 0.9953 | 0.6868 | 0.6809 | 0.2001 |
| | | | | 0.9967 | 0.6681 | 0.6575 | 0.1690 |
| | | | | 0.9996 | 0.6508 | 0.6353 | 0.1423 |
| | | | | 0.9997 | 0.6313 | 0.6108 | 0.1169 |
| | | | | 1.0000 | 0.6108 | 0.5858 | 0.0952 |

**الجدول رقم (16)قيم ال(MSE) لمقدر دالة البقاء**

| $MSE[\hat{s}_{ml(t_i)}]$ | $MSE[\hat{s}_{white(t_i)}]$ | BEST |
|---|---|---|
| 0.00034 | 0.00082 | ml |
| 0.00075 | 0.00233 | ml |
| 0.00108 | 0.00539 | ml |
| 0.00138 | 0.01092 | ml |
| 0.00159 | 0.02019 | ml |
| 0.00174 | 0.03215 | ml |
| 0.00177 | 0.04900 | ml |
| 0.00178 | 0.06705 | ml |
| 0.00173 | 0.08761 | ml |
| 0.00167 | 0.11034 | ml |
| 0.00159 | 0.13725 | ml |
| 0.00151 | 0.16222 | ml |
| 0.00151 | 0.18404 | ml |
| 0.00153 | 0.20822 | ml |
| 0.00163 | 0.22909 | ml |
| 0.00180 | 0.24595 | ml |
| 0.00203 | 0.26087 | ml |
| 0.00238 | 0.27154 | ml |
| 0.00287 | 0.27783 | ml |
| 0.00333 | 0.27798 | ml |

ظهرت نتائج الجدول رقم (16) ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل طريقة لتقدير لكونها تمتلك اقل MSE والنسب المئوية حسب تسلسل الأفضلية هي

| BEST | Method | precentage |
|---|---|---|
| 1'st | ML | %100 |
| 2'and | White's | %0 |

**الاستنتاجات**

1-التحليل المعلمي لدالة البقاء يتبين منه ان طريقة الامكان الاعظم الافضل لأنها حققت اقل MSE مقارنة مع طريقة وايت (White's) في العينات الصغيرة والكبيرة

2- اما طريقة White's فقد اظهرت انها اقل كفاءه قياسا بطريقة الامكان الاعظم في العينات الصغيرة والكبيرة.

3- - توجد علاقة عكسية بين وقت الفشل ودالة البقاء فزيادة وقت الفشل يجعل دالة البقاء تميل الى التناقص.

**التوصيات**

1- ينبغي استخدام طريقة الامكان الاعظم (MLE) في حجوم العينات الكبيرة

2- الابتعاد عن استخدام طريقة white's لانها اقل كفاءه لتقدير دالة البقاء ومؤشراتها

**المصادر**


1-Charless E.E., (1997), “An Introduction to Reliablity and maintainability Engineering”, Mc. Graw-INC.

**2-** Crowder, M. J., Kimber, A. C., Smith, R. L., and Sweeting, T. J. (1991). "Statistical Analysis of Reliability Data". Chapman and Hall. Great Britain.

**3-** Harter, H.L. and Moore, A.H. (1965), "Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of Gamma and Weibull Populations from Complete and from Censored Samples", Techno Metrics, vol.7, No .4, pp.639-643.

**4-** M. Pandey, S.K. Upadhyay, (1985), "Bayes Shrinkage Estimators of Weibull Parameters" Tech. Vol.R.34, No.5, December, PP. 491-494

**5-** Mark. E. Flygare, John A. Austin, Ross M. Buekwalter, (1985) "Maximum Likelihood Estimation for the 2-Parameter Weibull Distribution Based on interval- Data", IEEE, Vol. R-34, No.1, April PP. 57-59.

**6-** Mood,A.M. and Graybill,F.A. and Boes ,D.C.(1985), " Introduction to the Theory of Statistics",3rd Edition , McGraw-Hill ,Inc.Singapore.