

تقييم طريقة الخط في حل معادلات الجريان في التربة ومقارنتها بطريقة العناصر المحددة

د. عصام محمود محمد
استاذ مساعد
المعهد التقني-الموصل

الخلاصة

يهدف البحث إلى تقييم طريقة (MOL) Method Of Line في حل معادلات جريان الماء في التربة باستخدام دوال حزمة MATLAB في المعادلات التفاضلية ODE's بطريقة الفروقات المحددة finite difference بدلا من البرامج ذات الشفرات الطويلة المكتوبة بلغات البرمجة المختلفة، وإضافة معلم التزويد والسحب sink & source الى طريقة MOL. ثم مقارنة طريقة ال MOL مع طريقة العناصر المحددة (FEM) Finite Element المستخدمة في حل معادلات الجريان باتجاه واحد بالطريقة العددية باستخدام برنامج حاسوب بلغة FORTRAN. تم اختبار حالتين في عملية التقييم والمقارنة، الأولى دراسة لعملية الانتشاح باستخدام تربة رملية بمعاملات ثابتة لكلا النموذجين، وأظهرت النتائج أن هنالك تباعدا بين قيم كلا النموذجين مع الزمن الذي تراوح من 1 إلى 60 دقيقة حيث كان التغيير في المحتوى الرطوبي للتربة مع العمق حادا في نموذج FEM وتدرجيا وبطيئا مع نموذج MOL. أما في الحالة الثانية فاستخدمت بيانات حقلية لحقل مزرع ونبات الحنطة بإدخال عاملي الري والتبخر تم فيها مقارنة قيم المحتوى الرطوبي الحجمي للتربة على مدار فترة النمو ولأعماق التربة المختلفة لحد 100 سم، امتازت بيانات نموذج FEM بتطابق مع القيم المقاسة على درجة عالية من الثقة باستخدام t test على مستوى احتمالية 0.01 طوال فترة النمو وعلى أعماق التربة المختلفة. أما نموذج MOL فكانت بياناته اقل من البيانات المقاسة حقليا ولكنها بصورة موزة ازية لمختلف اعماق التربة وعلى مدار فترة النمو. الكلمات الدالة: الطريقة الخطية، العناصر المحددة، نماذج جريان الماء، التوزيع الرطوبي، المعادلات التفاضلية الجزئية، المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

Evaluation Of Method Of Line (MOL) For Solution Of Soil Water Flow Equations And Comparison With Finite Element Method (FEM)

Abstract

The objective of this research is to evaluate Method of Line (MOL) used for solution of water flow equations through porous media using MATLAB package functions for solution of ordinary differential equations ODE,s, instead of writing long programs codes. sink & source term to MOL model were included. Then Comparing MOL model with another model that uses finite element method in solving water flow equations

(FEM) in one dimensional flow using computer program code in FORTRAN. Two cases were examined for evaluation and comparison of these two models. Firstly, infiltration phenomena using sandy soil was studied with the same parameter for both models. Results show that there is a divergence between the two models along time of 60 minutes of infiltration. Changes of moisture content with soil depth were sharp with FEM model. Second case, data of the volume of water content for wheat field where used taking irrigation and evaporation into account, along the growth period of wheat crop and different depths up to 100 cm. Results show that output of FEM model has high degree of agreement with the measured data for all depths and along all period of growth. Data given by MOL model were less in values than measured data for all depths and along all period of wheat growth time.

Keywords: MOL, FEM, water flow models, moisture distribution, PDE, ODE

لمحاكاة حركة الماء والأملاح بالاتجاهين في التربة المشبعة وغير المشبعة.

تتضمن الطريقة الخطية (MOL (method of line) تقطيع المجال الخاص بالمعادلات وإبدال المعادلات التفاضلية الجزئية (partial differential equations PDE) بمعادلات المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ordinary differential equations (ODEs)) ، والتي تم تطوير حزم عديدة لتكاملاتها [2] و [3] . إن حزمة البرامجيات الجاهزة MATLAB تحوي إمكانية عالية في التعامل مع المنتجات والمصفوفات لحل معادلات والتي تم بواسطتها تطوير مجاميع حلول كفاءة وتضمنها MOL من قبل [3] . إن العديد من معادلات الجريان متشابهة في التركيب سواء كانت أحادية ، ثنائية أو ثلاثية الأبعاد للجريان، وسواء كانت ممثلة لعمليات الانتشار أو الإيصالية المعقدة. وقد طورت العديد من الصيغ باستخدام MATLAB للتعامل مع معادلات الجريان باستخدام الطريقة الخطية MOL [4] .

ان الهدف من هذا البحث هو

1- تضمين معلم السحب والتزويد (sink & source) في نموذج MOL

المقدمة

إن إمكانية نمذجة الجريان المشبع وغير المشبع في التربة مهم جدا في معالجة مشاكل هندسة الموارد المائية. وقد ازداد استخدام نماذج المحاكاة عن طريق الحاسوب والمعتمدة على أساس التحليل العددي المعدة لهذا الغرض، وهذا الاتجاه بلا شك سوف يستمر حيث تم تطوير العديد من النماذج مع استمرار انخفاض كلف استخدام الحاسب. وعلى اي حال فان تطوير نماذج مناسبة يستلزم حاجة لبيانات مكثفة، وان الحصول على دقة عالية لهذه النماذج معلق بمقدار الدقة في تقدير معاملات هذه النماذج. ان المعادلات التفاضلية الخاصة بهذا النوع من الجريان صعبة الحل وذلك بسبب الخاصية غير الخطية لهذه الظاهرة، وعلى العموم فانه من الضروري استعمال تقنية الحل العددي للمعادلات التي تحكم هذه العملية والمتمثلة في استخدام حلول الفروقات المحددة finite differences والعناصر المحددة finite elements.

يتم حل معادلات الجريان عدديا باستخدام هيكلية الطريقة القياسية ل Galerkin أو تحويلاتها والتي استخدمها [1] عند استخدامه للحاسوب في بناء نموذج SWMS_2D المكتوب بلغة الفورتران

ϕ_n دالة اسية خطية

Ω منطقة الجريان

وباستخدام الحلول التقريبية وبتطبيق قانون فعل الكتلة للمشتقات الزمنية والتكامل لكل عنصر يمكن الحصول على المصفوفات التالية:

$$[F] \frac{d\{\theta\}}{dt} + [A]\{h\} = \{Q\} - \{B\} - \{D\} \dots\dots\dots(5)$$

حيث ان

A = مصفوفة التوصيل Conductance matrix

B = متجه الجاذبية

D = متجه التزويد والسحب

Q = قيمة الشروط الحدودية Boundary condition

بافتراض الشروط الحدودية التالية:

$h(z,t)=h_0(t)$ at $x=0$ or $z=L$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \text{ at } z=0$$

للحصول C اضافة متجه سعة التربة [8] وقد اقترح على دقة عالية من الحل لتصبح المعادلة بالصيغة التالية: $\{h\}^{i+1,j} - \{h\}^{i+1,j+1} + [F][C]^{i+1} \{h\}^{i+1,j+1} + [A] \{Q\}^{i+1} - \{B\}^{i+1} - \{D\}^{i+1} - \{F\} \{h\}^{i+1,j} - \{i\} \dots\dots\dots(6)$

حيث ان t تعبر عن مستوى الزمن و z لمستوى الموقع (z,t) .

طريقة (MOL) Method of line

تعتمد هذه الطريقة على حل معادلة Richards

معادلة 2 وذلك يتمثل المشتقات التالية [4]

$$Z_i = Z^* + iAz$$

$$i=0,1,2 \dots\dots\dots N$$

حيث ان Az ثابتة Z^* هي نقطة الانطلاق و i عدد بعدد عقد هي $n+1$ باعتبار $f(z)$ دالة تفاضلية للعمق. مقدار التقريب لطريقة الفروقات Finite difference يمكن الحصول عليه من أي رتبة للتقدير وان مقدار الخطأ يقل بزيادة عدد رتب التقدير.

2- المقارنة بين نموذجي ال MOL الذي تم

الحصول عليه مع نموذج FEM المتمثل ببرنامج

حاسوب مكتوب بلغة SWM_2D FORTRAN

[1] باستخدام بيانات حقلية للارتشاح والتوزيع الرطوبي المأخوذة عن [5].

الجزء النظري

معادلة Richards [6]

إن صيغة هذه المعادلة للجريان باتجاه واحد بالاتجاه العمودي تتمثل

$$Cw \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(k \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z} \right) \right] \dots(1)$$

وعند إدخال عامل التزويد والسحب S تصبح المعادلة بالصيغة التالية:

$$Cw \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(k \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z} \right) - S \right] \dots(2)$$

حيث إن:

$h=h(z,t)$ الشحنة الهايدروليكية

K الايصالية الهايدروليكية

$Cw = \partial \theta / \partial h$ السعة الهايدروليكية

z البعد العمودي (الشحنة الكامنة والتي تعبر

عن $(p / \sigma + z)$

θ المحتوى الرطوبي الحجمي

S عنصر السحب والتزويد

$k(h)$ و $Cw(h)$ تعتبر دوال غير خطية بدرجة

عالية والتعبير $-\frac{\partial k}{\partial z}$ - عبارة عن مصطلح يمثل

الايصالية convective والنتاج عن تأثير الجاذبية

أما بقية التعابير فتمثل الانتشارية غير الخطية.

ويمكن كتابة المعادلة على أساس المحتوى الرطوبي

بالصيغة التالية:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(k \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z} \right) - S \right] \dots\dots\dots(3)$$

باستخدام طريقة العناصر المحددة (FEM) Finite

element [7] عن طريق Galerkin method

التي تحتاج الى عملية تفاضل لمعادلة

Richards فتصبح بالصيغة التالية:

عمليات MATLAB لضرب عنصر - في - عنصر ، حيث ان كل من U و v هي المتجهات الملائمة. حيث يتم اشتقاق $\frac{\partial k}{\partial h}$ مباشرة من $k(h)$ عند ذلك يمكن تمثيل المعادلة 2 كما يلي:

$$cw(h) \cdot \frac{dh}{dt} = A_z^d (k \cdot A_z^d h) - k_{h,c} (A_z^c h) \dots (11)$$

وهذه المعادلة هي عبارة عن نوع من المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) يمكن حلها باستخدام دوال MATLAB.

المواد و طرائق العمل

تم استخدام البرمجيات المكتوبة بلغة فورتران FORTRAN المعدة من قبل [7] والخاصة بحل معادلة Richards بصيغة عددية باستعمال العناصر المحددة. وتم تطوير البرمجيات المكتوبة بلغة MATLAB [9].

تمت إضافة عنصر الإضافة والسحب (Sink & source) وذلك لحل معادلة Richards بطريقة (MOL) Method of line .

استخدمت حالتين لتقييم ومقارنة كلا الطريقتين الأولى تمثلت بالبيانات المأخوذة عن [10] وهي السعة التشبعية للتربة θ_s ، المحتوى الرطوبي المتبقي θ_r و التوصيل الهيدروليكي غير المشبع K_s وثابت خاصة بالتربة m, n وهي تمثل ثوابت لمعادلة Van Genuchten [11].

أما الحالة الثانية فقد استخدمت فيها بيانات محلية مأخوذة عن بيانات تجربة لـ [5] تمثل بيانات للمحتوى الرطوبي للتربة على أعماق تتراوح من 0-100سم وطول فترة النمو للحنطة البالغة 140 يوم.

النتائج والمناقشة

تم تقييم ومقارنة كلا النموذجين (FEM), (MOL) باستخدام حالتين:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(k \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z} \right) \right] + S \right\} \phi_n d\Omega = 0 \dots (4)$$

ومن تطبيق الطريقة الخطية MOL ان الصيغة من الدرجة الرابعة من تقدير المشتقة الأولى $f(z)$ يمكن تمثيلها باستخدام المصفوفة التالية:

$$B = \frac{1}{24\Delta z} \begin{bmatrix} -50 & 96 & -72 & 32 & -6 \\ -6 & -20 & 36 & -12 & 2 \\ 2 & -16 & 0 & 16 & -2 \\ 6 & 20 & -36 & 12 & -2 \\ 6 & -32 & 72 & -96 & 50 \end{bmatrix} \dots (7)$$

وان الصف في B يستخدم للحصول على تمثيل لمشتقة $f(z)$ ولتمثيل الفرق المركزي من الدرجة الرابعة

$$\frac{df}{dz}(z_i) = \frac{1}{24\Delta z} [2, -16, 0, 16, -2] \Theta \begin{bmatrix} f_{i-2} \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{bmatrix} \dots (8)$$

ولتطبيق حل معادلة Richards بالاتجاه الأحادي بالطريقة الخطية MOL يمكن تعريف h بالمتجه $h(z,t)$ على النقاط العقدية (nodal) ويمكن اخذ مشتقة $\frac{\partial h}{\partial z}$ عند كل عقدة باستخدام المعادلة 8. أما عنصر الانتشار فيمكن تجزئته بتمثيله بواسطة الفرق المركزي للصف الوسطي من المصفوفة B. وبذلك يمكن تمثيل النقاط الأمامية والخلفية.

$$h_z^d = A_z^d h \dots (9)$$

حيث ان h_z^d هو متجه للمشتقة الأولى $\frac{\partial h}{\partial z}$ على مستوى او مدار الانتشار. أما مصفوفة A_z^d فهي المشتقة من الدرجة الأولى. وبافتراض k_h هي متجه لـ dk/dh فان قيمه تقدر عند كل عقدة على مدار الانتشار.

$$K_z^c = k_{h,c} (A_z^c h) \dots (10)$$

حيث ان K_z^c هو متجه للمشتقة الأولى لـ $\frac{\partial k}{\partial z}$ على مدار الانتشار واستخدمت عملية ضرب المتجهات والتي يعبر عنها بـ U.v كعملية من

الحالة الأولى

تم توليد بيانات الارتشاح infiltration لتربة جافة عند محتوى رطوبي ابتدائي (0.05) ولكلا النموذجين ولنفس الزمن من ناحية المحتوى الرطوبي للتربة لفترات الارتشاح المختلفة والتوزيع الرطوبي مع العمق. ويتبين من الشكل (1) ان هنالك اختلاف مابين بيانات كلا النموذجين مع زيادة زمن الارتشاح ويظهر منه ان نموذج FEM يسمح بحركة سريعة للماء نحو الأسفل وهذا يترتب عليه ارتفاع في المحتوى الرطوبي مع العمق أما نموذج MOL فكانت نفس حركة الماء نحو الأسفل تدريجية وشكل المعادلة مقارب لشكل معادلة الارتشاح التراكمي التجريبية لـ Kostiakof . أما عند زمن الارتشاح 60 دقيقة فما فوق فان الارتشاح يكون من السرعة بحيث يثبت فيه المحتوى الرطوبي على طول عمق التربة ويكون ضمن السعة التشبعية للتربة وهذا غير واقعي على عكس نموذج MOL الذي يمثل الحركة الطبيعية للغيض.

ومن الشكل رقم (2) يتضح سرعة حركة الماء نحو الأسفل لأعماق التربة المختلفة وبشكل مفاجئ عند الأزمان الأولية للغيض عند العمق 10 و 20 و 40 سم وهذا يتفق مع ما وجدته [9]. نسبة الرطوبة عند التشبع بعد 15 دقيقة من زمن الارتشاح وبذلك يتضح قدرة نموذج MOL على محاكاة عملية الارتشاح في التربة بدقة اعلى من نموذج FEM.

الحالة الثانية:

وتمت فيها مقارنة قدرة كل من النموذجين على محاكاة التوزيع الرطوبي للتربة في حالة البيانات الحقلية بوجود النبات والري والتبخر وقد تم تطبيق كلا النموذجين بعد إضافة عامل Sink & source لكل منهما ويظهر الشكل رقم (3) انطباقاً ملحوظاً ما بين القيم المقدرة للمحتوى الرطوبي وقيم نموذج FEM المحسوبة وهو ما تم تأكيده من خلال

t.test الذي لم يعطي فرقاً معنوياً على مستوى 0.01 مابين القيم المقدرة والمحسوبة ولطوال فترة النمو البالغة 140 يوماً. أما نموذج MOL فكانت قيم المحتوى الرطوبي المحسوبة على مدى فترة النمو اقل من القيم المقدرة، ولم تظهر نتائج التحليل الإحصائي باستخدام t.test أي تطابق معنوي ما بين القيم المقدرة والمحسوبة ولأعماق التربة المختلفة 5، 10، 30، 50، 100 سم. وهذا يتفق مع ما وجدته كل من [1] و [5] و [7].

أما الشكل (4) فيوضح التوزيع الرطوبي مع العمق لفترات القياس المختلفة طوال فترة النمو ويظهر فيه تطابقاً بدرجة عالية مابين القيم المقدرة والمحسوبة من قبل نموذج FEM وكانت دقة المطابقة تزداد مع العمق لحد 100 سم، أما القيم المحسوبة بواسطة النموذج MOL فكانت تشير إلى عدم التطابق مع القيم المقدرة وقد تم تأكيد ذلك عند المقارنة باستخدام t.test.

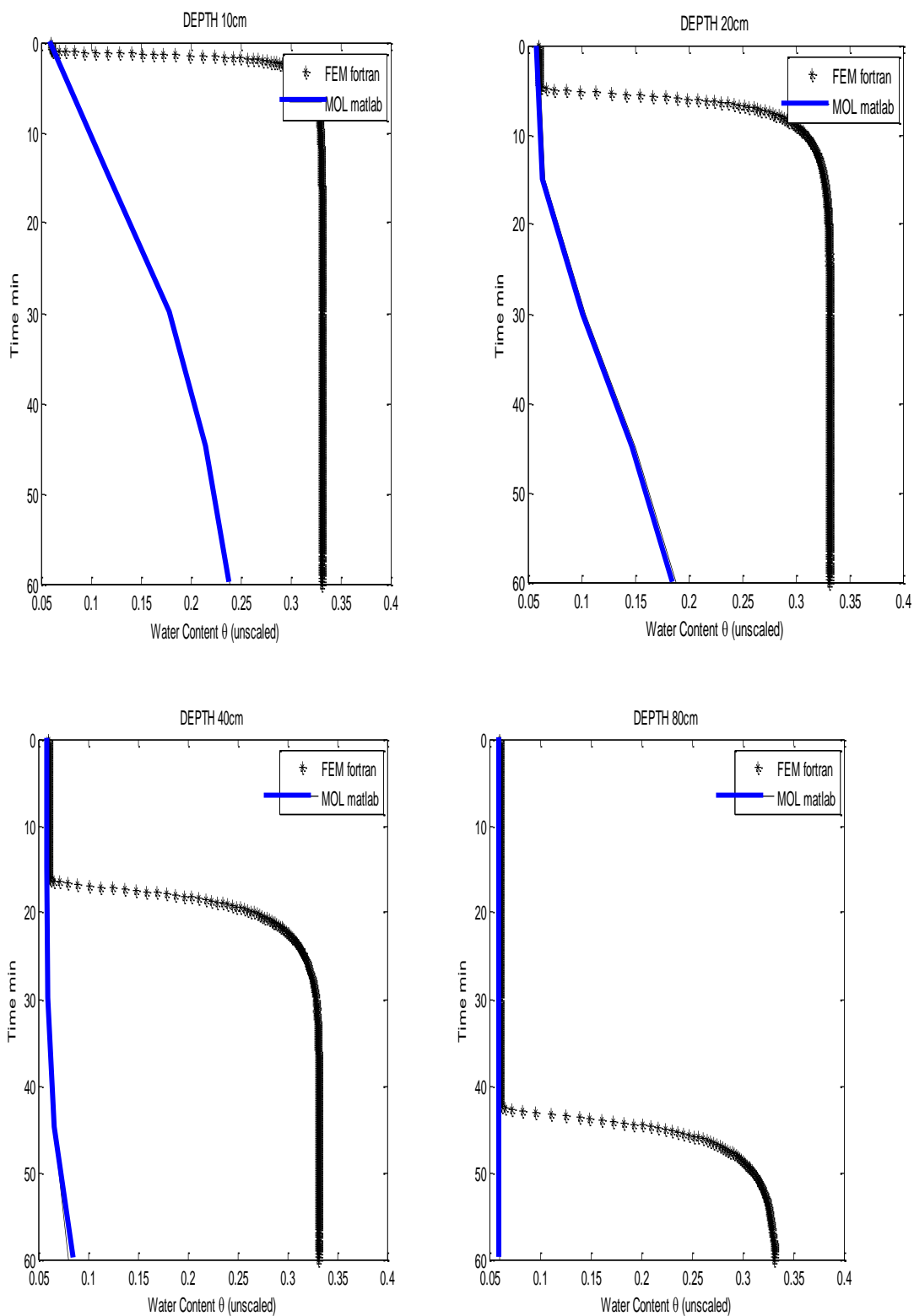
الاستنتاجات

في هذا البحث تم تطبيق نموذجين لحركة الماء في التربة الأول باستخدام طريقة التحليل العددي بطريقة العناصر المحددة Finite element وبرمجتها بلغة Fortran والثاني باستخدام طريقة التحليل العددي بطريقة الفروقات العددية Finite difference باستخدام دوال MATLAB وذلك لاختصار زمن البرمجة واستثمار دوال MATLAB. وقد اظهر النموذجين اختلاف في التطبيق في حالة الارتشاح تفوق نموذج MOL على نموذج FEM من حساب حركة الماء اما في حالة التوزيع الرطوبي على مدار فترات زمنية طويلة ولأعماق التربة بإضافة عنصر التزويد والسحب sink & source تفوق نموذج FEM على نموذج MOL فقد أعطى نموذج FEM انطباقاً عالياً مع البيانات المقاسة في الحقل . وهذه النتائج تشير إلى الإمكانية العالية لنموذج

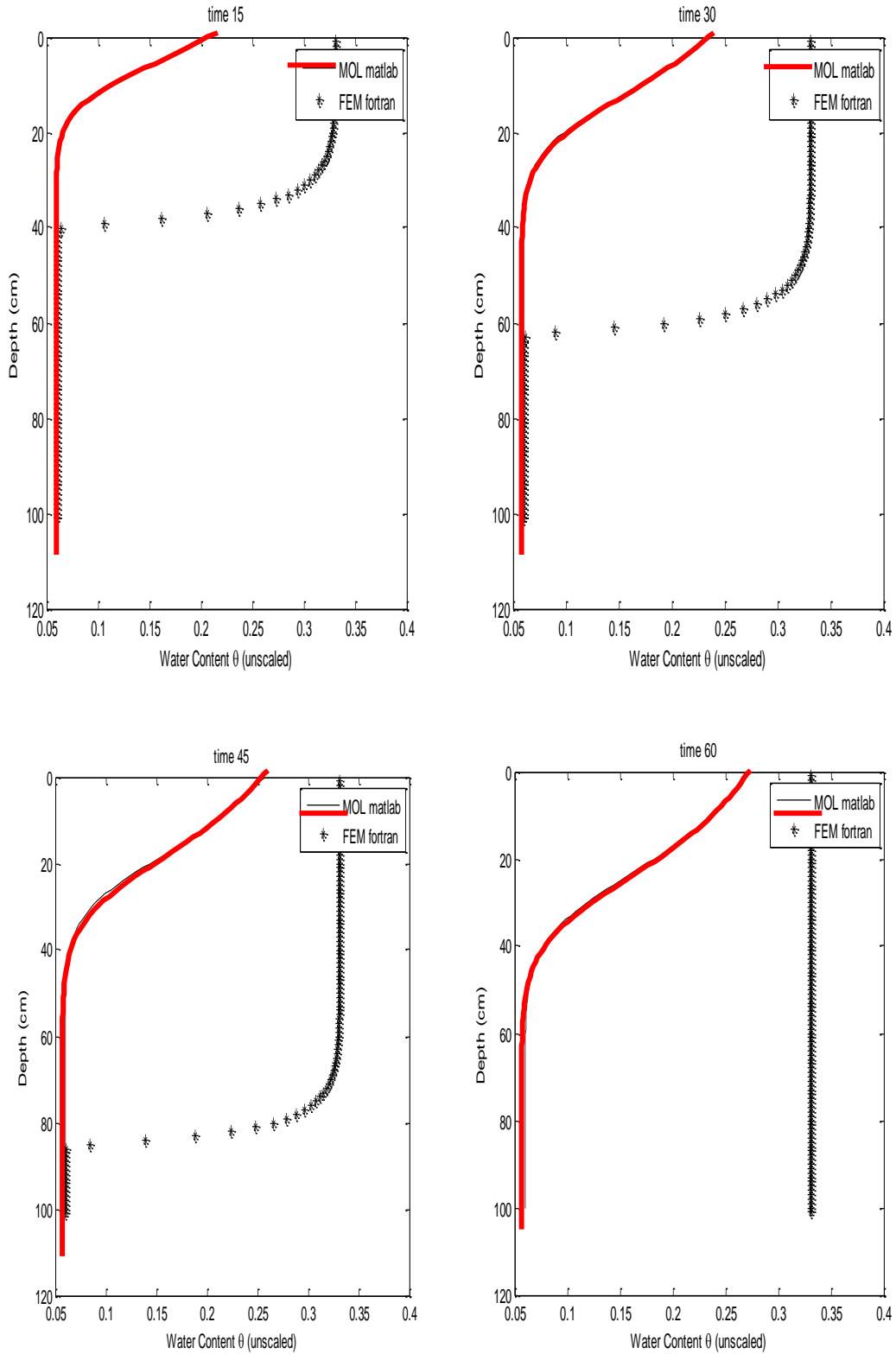
5. محمد، عصام محمود 2000، "تمذجة حركة الماء في التربة تحت الظروف الحقلية باستخدام طريقة العناصر المحدودة"، رسالة دكتوراه، كلية الزراعة والغابات، جامعة الموصل.
6. Richards, L. A. 1931, "Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums," *Physics* 1:318-333.
7. Vogel, T., K. Huang, R. Zhang, and M. T. van Genuchten, 1996, "The HYDRUS Code for Simulating One-Dimensional Water Flow", solute transport, and heat movement in variable-saturated media, version 5, U.S. Salinity Lab., Agric. Res. Serv., U.S. Dep. of Agric., Riverside, Calif.,.
8. Celia , M.A., and E.T.Boututas ,R.L.Zarba.Lao.1990, "A General Mass - Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation", water Resour. Res. 26, 1483-1496.
9. Lee, H.S., C.J. Matthews a, R.D. Braddock a, G.C. Sander b, F. Gandola.2003, "A MATLAB Method of Lines Template for Transport Equations", *Environmental Modelling & Software* 19 (2004) 603-614.
10. Watson, K.K., Sardana, V.A., Sander, G.C., 1995, "Comparison of Analytical and Numerical Results for Constant Flux Infiltration", *Journal of Hydrology* 165, 101-112.
11. Van Genuchten, M.Th., 1980, "A Closed - Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *Soil Sei. Am., J.*, 44: 892-989.
- FEM في تقدير التوزيع الرطوبي في التربة مع حاجته للمعايرة وفي تقدير بيانات الارتشاح في التربة أما طريقة MOL فعلى الرغم من كفاءتها في تقدير حركة الماء مع الارتشاح الا انها تحتاج الى حل للمعادلات بطريقة أدق في حساب التوزيع الرطوبي وقد يعود ذلك بأن طريقة العناصر المحددة Finite element تفوق طريقة الفروقات المحددة Finite difference في حل معادلة حركة الماء خلال الوسط المسامي.

المصادر

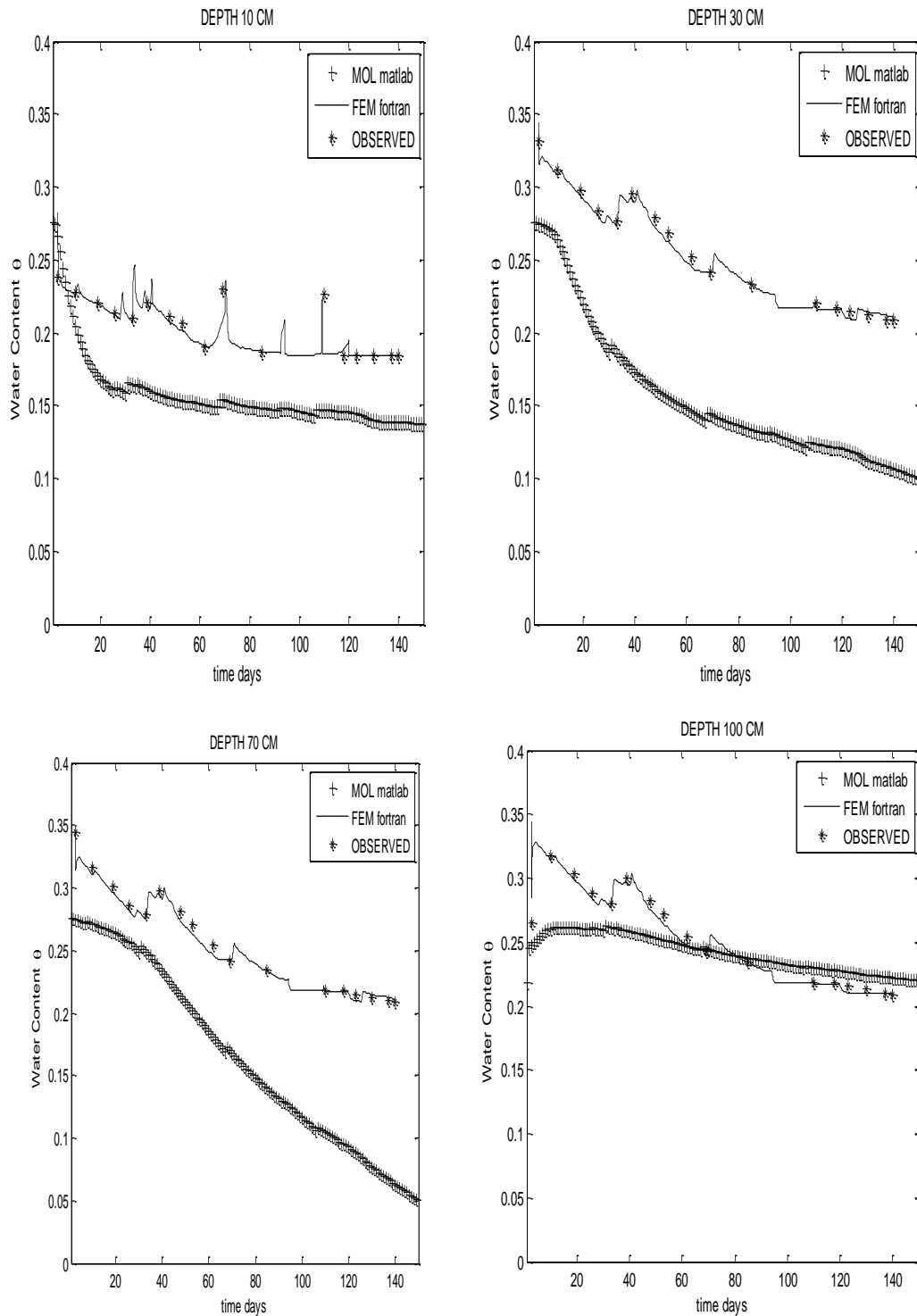
1. Simunek , J., T. Vogel, and M. T. van Genuchten.1994, "The SWMS 2D Code for Simulating Water Flow and Solute Transport in Two-Dimensional Variably Saturated Media", Version 1.21, 197 pp., U.S. Salinity Lab.,Agric. Res. Serv., U.S. Dep. of Agric., Riverside, Calif.
2. Schiesser, W.E., 1991, "The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations: ODEs, DAEs and PDEs". Academic Press, San Diego.
3. Shampine, L.F., Reichelt, M.W., 1994. "The MATLAB ODE" Suite Report 94-6. Math. Dept SMU, Dallas.
4. Lee, H.S., Braddock, R.D., Sander, G.C., 1998, "Automating the Method of Lines for Modeling Moisture Flow in the Unsaturated Zone", In: Noye, B.J., Teubner, M.D., Gill, A.W. (Eds.), *Computational Techniques and Applications: CTAC-97*. World Scientific Publishing Co, Singapore.



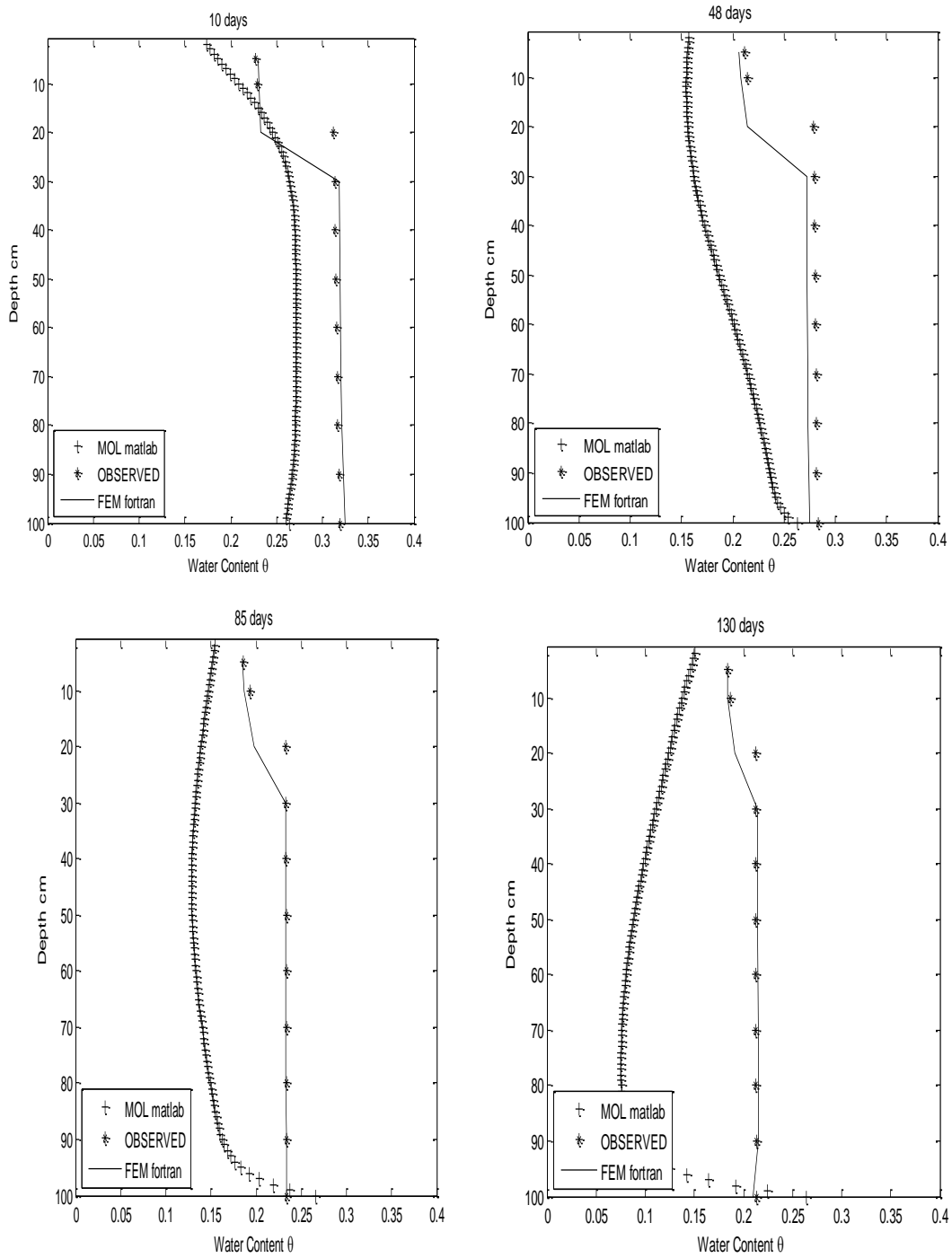
شكل (1) المحتوى الرطوبي الحجمي على اعماق التربة المختلفة لزمن ارتشاح 60 دقيقة
ولكلا النموذجين FEM , MOL عند تطبيقهما في توليد بيانات الارتشاح
لتربة جافة



شكل (2) المحتوى الرطوبي الحجمي على فترات الارتشاح المختلفة ولعمق 100 سم ولكلا النموذجين FEM , MOL عند تطبيقهما في توليد بيانات الارتشاح لتربة جافة.



شكل (3) المحتوى الرطوبي الحجمي على اعماق التربة المختلفة طوال فترة النمو لنبات الحنطة في حالة تطبيق كلا النموذجين FEM , MOL و القيم المقاسة في الحقل (محاكاة).



شكل (4) المحتوى الرطوبي الحجمي للتربة طوال فترة النمو المختلفة لنبات الحنطة ولعمق 100 سم في حالة تطبيق كلا النموذجين FEM, MOL و القيم المقاسة في الحقل (محاكاة).