تقدير متوسط حجم العينة ونسبة المعيب في المعاينة المفردة المبتورة مع تطبيق عملي

م. د. أسامة محمد جاسم
جامعة بغداد/ كلية الزراعة

المقدمة

يستخدم فحص المعاينة عندما نقيّم نوعية المنتج بواسطة العينات بدلاً من الفحص الشامل الذي يؤدي إلى زيادة التكاليف والوقت المطلوب، إضافة إلى إمكانية تلف الوحدات خاصة في حالات الفحص التدميري مثل فحص الصور الفوتوغرافية، والمطبوعات، وغيرها، ولتخفيض كمية الفحص، من الضروري استخدام الفحص المبتور كأحد الأساليب المهمة التي اعتمدت في مجال السيطرة النوعية، ويعتبر مفهوم معدل حجم العينة (ASN) من المفاهيم المهمة في هذا النوع من الفحص، إضافة إلى نسبة المعيب في المنتج، لذلك سنحاول اشتقاق صيغة مبسطة لمعدل حجم العينة، وكذلك اشتقاق مقدر لنسبة المعيب في حالة المعاينة المبتورة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وسوف نوضح كل الرموز والعلاقات الضرورية للحصول على المقدّر $\hat{p}$ وكذلك على صيغة مبسطة لمعدل حجم العينة وهو ما يمثل هدف بحثنا هذا.

Abstract

The purpose of this research is to find the estimator of the average proportion of defectives based on attribute samples. That have been curtailed either with rejection of a lot finding the kth defective or with acceptance on finding the kth non defective.

The MLE (Maximum likelihood estimator) is derived. And also the ASN in Single Curtailed Sampling has been derived and we obtain a simplified Formula All the Notations needed are explained.

هدف البحث

إيجاد مقدر الإمكان الأعظم لنسبة المعيب ومعدل حجم العينة (ASN) في المعاينة المفردة شبه المبتورة، وقبل الدخول في تفاصيل ذلك لابد من شرح لآلية العمل.

1. نوجد عدد المعيب K في الكمية المرفوضة أو قبل رفضها.
2. نفرض K عدد الوحدات الجيدة التي نجدها والتي عندها تقبل الدفعة.

y : عدد الوحدات المفحوصة للوصول إلى قرار القبول أو الرفض، y هو متغير متقطع يأخذ القيم

$$y = k, k+1, \ldots\ldots n$$

$$n = k + K - 1 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

تنتهي عملية المعاينة بعد الحصول على k وحدة معيبة من الدفعة المنتجة من المنتج ذو النوعية P .

P : احتمال الحصول على وحدة معيبة في محاولة مفردة ولكن هذا الاحتمال ثابت خلال المحاولات المستقلة (ويمكن تمثيل P بمتوسط نسب المعيب المشاهدة) .

إن الدالة الاحتمالية لـ y يمكن تمثيلها بـ

$$F(y,p) = F(y \cap R, p) + F(y \cap A, p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وهو الاحتمال المشترك من رفض وقبول الدفعة وعليه فأن

$$F(y \cap R, p) = \subset \begin{matrix} y-1 \\ k-1 \end{matrix} p^{k} q^{y-k} \qquad y = k, k+1, \ldots, n \quad \ldots.(3)$$

$$F(y \cap A, p) = \subset \begin{matrix} y-1 \\ k-1 \end{matrix} q^{k} p^{y-k} \qquad y = k, k+1, \ldots, n \quad \ldots.(4)$$

$$q = (1 - p)$$

إن الدالة الاحتمالية لتوزيع ثنائي الحدين السالب وهو التوزيع الملائم لحالة تكرار المحاولات المـستقلة لحين الحصول على k من حالات النجاح، ستكون

$$F(y,p)=\begin{cases} \subset_{k-1}^{y-1}\ p^{k}\ q^{y-k} & y=k,k+1,..,k-1 \\ \subset_{k-1}^{y-1}\ p^{k}\ q^{y-k}+\ \subset_{k-1}^{y-1}\ q^{k}\ p^{y-k} & y=k,k+1,...,n \\ o & o/w \end{cases} \quad ...(5)$$

طبقاً لذلك يكون احتمال رفض الدفعة هو

$$p(R)=pr\ (y\geq k)=\sum_{y=k}^{n}\ \subset_{k-1}^{y-1}\ \ p^{k}\ \ q^{n-k}$$

وبإدخال المتطابقة المعروفة بين توزيع ثنائي الحدين وتوزيع ثنائي الحدين السالب وهي

$$\sum_{Z=k}^{n}\ \subset_{Z}^{n}\ \ p^{Z}\ \ q^{n-k}\ =\ \sum_{y=k}^{n}\ \subset_{k-1}^{y-1}\ \ p^{k}\ \ q^{y-k}$$

$$p(R)=\sum_{Z=k}^{n}\subset_{Z}^{n}\ p^{z}\ q^{n-z} \qquad ....\ ..(6)$$

حيث Z-1 يمثل عدد المعيب في العينة n

التقدير باستخدام المعاينة المبتورة

لنفرض أن m من الدفعات خضعت للفحص طبقاً إلى خطة المعاينة المبتورة، وان a يمثل عـدد الدفعات المقبولة، r يمثل عدد الدفعات المرفوضة

$$m = a + r$$

ولنفرض أن عدد الوحدات المعيبة التي تظهر خلال الفحص وأن عدد الوحدات المفحوصة تسجل لكل دفعة عندئذ تكون بيانات العينة عبارة عن أزواج من القيم هي

$$(Z_1, y_1)\ (Z_2, y_2) \ldots (Z_a, y_a), (k, y_{a+1})\ (k, y_{a+2}) \ldots (k, y_{ar+r})$$

عدد المعيب الموجود $Zi\ (i = 1, \ldots a)$
في الدفعة المقبولة i $(Zi < k)$
k عدد المعيب الموجود في الدفعة المرفوضة لذلك وصفت أزواج القيم

$$(Zi\ , yi) \qquad , i = 1, 2, \ldots m \qquad , Zi < k$$

للدفعة المقبولة
للدفعات المرفوضة $Zi = k$
باستخدام دالة الإمكان الأعظم لهذه الدالة نجد أن

$$L(Z_1, y_1)(Z_2, y_2) \ldots (Z_m, y_m)$$

$$\prod_{i=1}^{r} \subset {yi-1 \atop k-1} p^k q^{yi-k} \prod_{i=1}^{a} \subset {yi-1 \atop k-1} q^k p^{yi-k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots(7)$$

ثم نأخذ اللوغاريتم ونشتق بالنسبة لـ p

$$\operatorname{LnL} = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Ln} \subset_{k-1}^{yi-1} + rk \operatorname{Ln}(p) + \sum_{i=1}^{r} (yi-k) \operatorname{Ln}(q)$$
$$+ \sum_{i=1}^{a} \operatorname{Ln} \subset_{k-1}^{yi-1} + ak \operatorname{Ln}(p) + \sum_{i=1}^{a} (yi-k) \operatorname{Ln}(p)$$

$$\frac{\partial \operatorname{LnL}}{\partial p} = 0 + \frac{rk}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{r}(yi-k)}{(1-p)}(-1) + 0 + \frac{ak}{(1-p)}(-1)$$
$$+ \sum_{i=1}^{a}(yi-k)\frac{1}{p}$$

$$= \frac{rk}{p} - \frac{\overset{r}{\Sigma} yi - rk}{(1-p)} - \frac{ak}{(1-p)} + \frac{\sum_{i=1}^{a} yi - ak}{p}$$

$$= \frac{rk(1-p) - p\left(\overset{r}{\Sigma} yi - rk\right) - pak + (1-p)\left(\overset{a}{\Sigma} yi - ak\right)}{p(1-p)} = 0$$

$$= rk - rkp - p\overset{r}{\Sigma} yi + prk - pak + \overset{a}{\Sigma} yi - ak - p\overset{a}{\Sigma} yi + pak = 0$$

$$= rk + \sum_{i=1}^{a} yi - p\overset{r}{\Sigma} yi - ak - p\ \overset{a}{\Sigma} yi$$

$$rk + \sum_{i=1}^{a} yi - p\left(\overset{r}{\Sigma} yi + \overset{a}{\Sigma} yi\right) - ak = 0$$

$$\hat{p} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} yi - ak\right) + rk}{\sum_{i=1}^{m} yi} \qquad \text{.......... ....(8)}$$

يتضح من المعادلة 8 ان:

rk عدد المعيب في r من الدفعات المرفوضة

ak عدد الوحدات الجيدة في الدفعات المقبولة

$\sum_{i=1}^{a} yi$ العدد الكلي للوحدات المفحوصة في a من الدفعات المقبولة

$\sum_{i=1}^{m} yi$ العدد الكلي للوحدات المفحوصة في (m=atr) دفعة.

من المعادلة 8 أيضا يكون لدينا

$$\hat{P} = \frac{\text{عدد الوحدات المعيبة}}{\text{العدد الكلي للوحدات}}$$

ويمكن الحصول على التباين التقريبي للمقدر P من

$$V(\hat{p}) \simeq \frac{1}{-E\dfrac{\partial^2 LnL}{\partial p^2}}$$

$$V(\hat{p}) \simeq = \hat{p}\hat{q} / m\ E(y) \simeq \hat{p}\hat{q} \Big/ \sum_{i=1}^{n} yi \qquad ....(9)$$

وسوف نشتق فيما يلي صيغة E(y)

وقبل الاشتقاق لابد من توضيح معنى الفحص المبتور ثم اشتقاق معدل حجم العينة لهذا النوع من الفحص والضروري لاتخاذ وإقرار القبول أو الرفض

حدد الباحث كنثر (Guenther 1977) طريقة الفحص المبتور بالخطوات الآتية.

1. تحديد معالم خطة المعاينة (n,c) .
2. وقف الفحص حال الحصول على (c+1) وحدة معيبة أو الحصول على (n-c) وحدة جيدة وفي حالة الفحص المبتور يكون عدد الوحدات المفحوصة للوصول إلى قرار بصدد العينة، متغيراً عشوائياً (M) يأخذ القيم من (c+1) إلى n ويتبع هذا المتغير توزيع ثنائي الحدين السالب Negative Binomial distribution وتعرف الدالة الاحتمالية لهذا المتغير بالمعادلة:

$$f(m,p) = C_{C}^{m-1}\ p^{C+1} q^{m-C-1} \qquad m = C+1, C+2, \ldots. n$$

ومن أنواع الفحص المبتور نذكر:

1.الفحص شبه المبتور Semi-Curtailed Inspection

في هذا النوع يتم التوقف عن فحص مفردات العينة عند الحصول على عدد من الوحدات المعيبة يتجاوز عدد القبول C، أي يتم التوقف عند الفحص حال الوصول إلى قرار الرفض، وفي حالة القبول يتم فحص كل مفردات العينة .

2.الفحص المبتور التام Fully Curtailed Inspection

هنا يتم التوقف عند الحصول على وحدات معيبة يتجاوز عدد القبول C، أو الحصول على وحدات جيدة لا تقل عن (n-c) أي يتم التوقف في حالة الوصول إلى قرار رفض أو قبول على حد سواء.

أما معدل حجم العينة فهو معدل عدد الوحدات لكل دفعة قبل الوصول الى القرار ويعتمد على p (نسبة الوحدات المعيبة في المنتج)، ويمثل هذا المعدل العدد المتوقع لعدد الوحدات المفحوصة في حالة الرفض + العدد المتوقع لعدد الوحدات المفحوصة في حالة القبول.

وقبل توضيح اشتقاق صيغة ASN لابد من تعريف الرموز الآتية :

P: نسبة الوحدات المعيبة في المنتج

Q: نسبة الوحدات الجيدة في المنتج

C: عدد الوحدات المعيبة المقبولة في العينة ويسمى عدد القبول Acceptance Number

Pa : احتمال قبول المنتج ذو النوعية P

$$Pa=pr(M \le c)$$

M متغير عشوائي يمثل الوحدات المفحوصة للوصول إلى (C+1) من الوحدات المعيبة. ويتبع توزيع ثنائي الحدين السالب بالمعالم (c,p), ولكي نشتق صيغة لمعدل حجم العينة لخطة المعاينة المفردة في الفحص شبه المبتور

ASN for semi-curtailed Single Sampling plan

لابد من إيضاح بعض المعادلات والمتطابقات الرياضية التي نحتاج إليها، ومنها متطابقة (Grais1968) وهي:

$$\sum_{m=n+1}^{c} \binom{m-1}{c} p^{c+1} q^{m-c-1} = q^{n-c} \sum_{k=o}^{c} \binom{n-k-1}{c-k} p^{c-k} \quad \ldots\ldots\ldots(11)$$

ومن المعلوم أيضا ان احتمال القبول للمنتج ذو النوعية تحت شروط معاينة ذي الحدين هو

$$pr(D \le C) = \sum_{d=0}^{c} \binom{n}{d} p^{d} q^{n-d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

أي أن احتمال الحصول على c أو اقل من الوحدات المعيبة من بين المجموعة الأولى المسحوبة من الدفعة والبالغة n هو مكافئ لاحتمال أيجاد الوحدة المعيبة التي تسلسلها (c+1) عند سحب (n+1) أو أكثر من الوحدات وعليه تكون الصيغة البديلة لاحتمال القبول pa نتيجة استخدام توزيع ثنائي الحدين السالب هي

$$Pa=\sum_{m=n+1}^{\infty} C_{c}^{m-1}\; p^{c+1}\; q^{m-c-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

$$m=n+1,n+2,\ldots\ldots\infty$$

وللسهولة سوف نفرض

$r = m - n - 1$

فان المعادلة 13 ستصبح

$$pa=\frac{p^{c+1}q^{n-c}}{c!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r)!}{(n+r-c)!}\,q^{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

وحيث أن

$$(n+r)^{(c)}=(n+r)\,(n+r-1)\ldots\ldots\,(n+r-c+1)$$

من الممكن تبسيط الحد

$$\frac{(n+r)!}{(n+r-c)!}=\frac{(n+r)(n+r-c)\ldots(n+r-c)!}{(n+r-c)!}$$

$$=(n+r)^{c}$$

بذلك نحصل على

$$pa=\frac{p^{c+1}q^{n-c}}{c!}\sum_{r=0}^{\infty}(n+r)^{(c)}\;q^{r}$$

إضافة لذلك سوف نبسط المقدار $(n+r)^{(c)}$ بالاعتماد على نظرية ثنائي الحدين

$$(n+r)^{(c)}=a_0+a_1(r+1)+a_2\,C_{2}^{r+2}+a_3\,C_{3}^{r+3}+\ldots\ldots+a_c\,C_{c}^{r+c}$$

ومن الممكن إيجاد قيم المعاملات $\left(a_0,a_1,\ldots\ldots,a_c\right)$ بأخذ الفروق المتعاقبة للطرفين بالاعتماد على r وجعل $r=-j-1$ عند الفرق ذي الرتبة j ومن هنا يكون

$$(n+r)^{(c)}=\sum_{k=0}^{c}C^{k}(n-k-1)^{c-k}\,C_{k}^{r+k}$$

$$c^{(0)}=1$$

وبالاعتماد على هذه العلاقة يكون احتمال القبول

$$pa=\frac{p^{C+1}\ q^{n-C}}{C!}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{C} c^{(k)}(n-k-1)^{(c-k)}\binom{r+k}{k}\ q^{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

$$\because \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+k}{k}\ q^{r}=(1-q)^{-(k+1)} \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

$$\therefore pa=p^{C+1}q^{n-C}\sum_{k=0}^{C}\binom{n-k-1}{c-k}\ p^{-k-1}$$

$$=q^{n-C}\sum_{k=0}^{C}\binom{n-k-1}{c-k}\ p^{c-k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

وبالاعتماد على نفس الأسلوب أعلاه، نشتق صيغة رياضية لمعدل حجم العينة لخطة المعاينـة المفـردة شبه المبتورة

$$ASN=npa+E(m|m\le n) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

علماً بأن

$$E(m\mid m\le n)=E(m)-E(m\mid m\ge n+1)$$

وبما أن M متغير عشوائي يتبع ثنائي الحدين السالب
باستخدام متطابقة Craig يكون

$$E(m|m\le n)=\frac{c+1}{p}-(c+1)q^{n-c}\sum_{k=o}^{c+1}\binom{n-k}{c-k+1}\ p^{c-k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

وبالتعويض عن (k=o) واستخدام صيغة pa المبسطة التي توصلنا إليها في المعادلة (17) تكون

$$E(m|m\le n)=\frac{c+1}{p}-(c+1)\binom{n}{c+1}\ p^{c}q^{n-c} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

$$-\frac{c+1}{p}pa$$

$$ASN=\left(n-\frac{c+1}{p}\right)pa+(c+1)\left[\frac{1}{p}-\binom{n}{c+1}p^{c}q^{n-c}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

وهي صيغة مبسطة تعتمد على معالم خطة المعاينة المفردة (n,c) والتي تعبر عن حجـم العينـة n وعدد الوحدات المعيبة المقبولة c، وكذلك تعتمد على احتمال القبول pa، ونسبة المعيب المقبولة فـي المنتج (p).

الجانب التطبيقي

بغية تطبيق الأفكار الواردة في البحث، فقد أخذت بيانات عن نسب المعيـب لمجموعـة 58 دفعـة إنتاجية من منتوج بطارية النور حجم الدفعة N = 2000 ووجد أن النوعية متغيرة من دفعـة إنتاجيـة إلى أخرى وأن توزيعها هو:-

نسب المعيب	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
عدد الدفعات	2	3	3	3	5	4	7	6	3

نسب المعيب	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
عدد الدفعات	6	5	3	3	1	2	2

58

ووجد أن متوسط شبه المعيب المشاهد $\overline{P} = 0.0553$

والانحراف المعياري $SP = 0.00132$

وبعد رسم واختبار توزيع النوعية وجد أن توزيع نسب المعيب المشاهد هو بيتا بالمعلمات:

$$Beta\ (\hat{s}, \hat{t})$$

وتم تقدير المعلمات ووجدت

$$\hat{s} = 7.70$$

$$\hat{t} = 131.5$$

وهنا تكون العملية الإنتاجية تحت سيطرة (Beta – Binomial) لأن توزيع الوحدات المعيبة بالإنتـاج هو ثنائي الحدين بالمعلمة (n , p)، وأن p متغير عشوائي يتغير من دفعة إلى أخرى وباستخدام اختبار حُسن المطابقة وجد أنه يتوزع بيتا بالمعلمات التقديرية $(\hat{s}, \hat{t})$ والتي تم تقديرها بطريقة العزوم وحصلنا على المقدرات السابقة وعليه يُعد متوسط هذا التوزيع تقديراً لمعدل النوعية.

بعد ذلك تم احتساب قيم احتمال قبول المنتوج $pr(X \le C) = B(c,n,p)$
لخطتي معاينة هما $(c=1, n=20)$
والثانية $(c=5, n=100)$
وحصلنا على النتائج التالية:-

جدول رقم (1)
يتضمن نسب المعيب واحتمال القبول ومعدل حجم العينة المبتورة

P	B(c, n, p)	معدل حجم العينة المفردة المبتورة ASN
C = 1	**n = 20**	
0.030	0.8802	18.127
0.060	0.6605	15.364
0.090	0.4516	15.214
0.120	0.2891	13.304
0.150	0.1756	11.205
0.180	0.1018	9.631
0.210	0.0566	8.411
0.240	0.0302	7.511
0.270	0.0155	7.031
0.30	0.0076	
		105.485
0.015	0.9959	103.536
0.030	0.9192	98.216
0.045	0.7050	95.341
0.060	0.4407	90.64
0.075	0.2308	89.73
0.09	0.1045	85.74
0.105	0.0420	80.66
0.120	0.0152	70.47
0.135	0.0051	

الاستنتاجات

1- وجد أن معدل النوعية لمنتوج بطارية النور هو متغير عشوائي، وأن معـدلات الإنتـاج غيـر مستقرة بسبب الظروف الحالية التي يمر بها القطر، وأن توزيع النوعية المشاهد هو توزيـع بيتا بالمعالم التقديرية $(\hat{s}, \hat{t})$.

2- في حالة المعاينة المفردة يكون حجم العينة ثابت أما بالنسبة للفحـص المبتـور فـأن معـدل الفحص متغير ويتناقص، وفي هذا أهمية كبيرة في تخفيض التكاليف وخاصة بالنسبة للوحدات الباهظة الثمن وبالنسبة للوحدات السريعة التلف.

3- وجد أن معدل حجم العينة المفردة الثابتة لخطة الفحص التميزي (ASN = 20) و (ASN = 100) ولجميع قيم p ، أما معدل حجم العينة لخطة المعاينة المفردة المبتورة فهو قيمة تعتمد على p وكلما ازدادت قيمة p تتناقص قيمة ASN، وكما واضح في الجدول رقم (1)

4- يمثل المقدر $\hat{P}$ نسبة المعيب الكلي الموجود خلال الفحص وهو يوفر مؤشر جيد لبيان نسبة المعيب في الإنتاج ومحاولة الوقوف على أسبابها.

5- وجد أن نسبة المعيب في المنتوج متغير عشوائي يتبع توزيـع بيتـا بالمعلمـات (s,t) وتـم تقديرها بطريقة العزوم وحسب المتوسط والانحراف المعياري.

6- أن معدل حجم العينة المفردة المبتورة الضروري للفحص ومن ثـم اتخـاذ قـرار القبـول أو الرفض، يكون أقل من معدل حجم العينة المفردة الثابتة ولجميع نسب المعيب التي وردت فـي الجدول (1)، وهذا يعني أن المعاينة المبتورة تؤدي إلى تخفيض في معدل الفحـص وبالتـالي تخفيض في تكاليف المعاينة خاصة عند فحص الوحدات الغالية الثمن أو عندما تكون وحـدات التجربة مشاهدات طبية صعب الحصول عليها، أو يكون الفحص تدميري يـؤدي إلـى تلـف الوحدة.

التوصيـــات

1- نوصي باستخدام المعاينة المفردة المبتورة عند فحص وحدات العينة، لأنها توفر الوقت وتحقق نفس الهدف المرجو من خطة المعاينة بأقل كلفة.

2- نوصي باعتماد مقدر الإمكان الأعظم في تقدير متوسط نسب المعيب لما يتمتع به هذا المقّـدر من ميزات، منها عدم التحيز، الكفاءة ويملك اقل متوسط مربعات خطأ ممكن.

المصـــــــادر

1. Craig.C.C(1968).The Average Sample Number for Truncated Single and Double Attribute Acceptance Sampling plans. Techonmetrics,Vol,10,N0.4

2. Hald,A.(1981).Statistical theory of Sampling Inspection by Attributes. Academic press INC.London.

3. القزاز، إسماعيل إبراهيم (1997)،. ضبط الجودة النظرية والتطبيق، مكتبة طرابلس- الطبعـة الأولى-بنغازي.

4. عبدا ، سهاد احمد . دراسة نظرية وتطبيقية لمعدل حجـم العينـة فـي المعاينـة المبتـورة والمزدوجة للفحص التمييزي رسالة ماجستير قسم الإحصاء-جامعة بغداد 1998.

5. حسن، ضوية سلمان وآخرون ((بناء نموذج لخطة المعاينة البيزيـة المفـردة فـي الـسيطرة النوعية)) مقبول للنشر في مجلة كلية العلوم الإدارية والاقتصادية جامعة بغداد 2007.