تصميم خطة معاينة للفحص المتعدد عندما يكون وقت الفحص متغير عشوائي يتبع توزيع گاما

ΣŶŖ ƓŔķķŶķ .ķ.þ
‡ăŊŎŒŨ /ǪăųǰŎŊ

الخلاصة

يتناول البحث تقديم نظام الفحص المتعدد للوحدات GASP، حيث يتم فحص الوحدات المنتجة بشكل مجموعات عددها k وحجم كل منها r، وتحديد معلمات خطط الفحص (n=k.r)، c عدد القبول (عدد الوحدات المعيبة المقبولة في العينة) والتي على اساسها يتخذ قرار قبول او رفض العينة. وسيتم تحديد المعلمات (n, c) تحت شروط تحقق كل من مخاطرة المنتج α (احتمال رفض منتوج جيد)، ومخاطرة المستهلك β (احتمال قبول منتوج رديء)، ولا بد من تحديد (n, c) واحتمال قبول المنتوج بافتراض ان زمن الفحص المستغرق لحين حصول فشل في عمر الوحدة المنتجة هو متغير عشوائي يتبع توزيع گاما بمعلمة شكل معلومة، ومعلمة قياس θ تحدد وفقاً لمستويات البتر المقترحة لزمن الفحص، وسوف توضح نتائج خطط المعاينة في جدول خاص بها.

Abstract

In practice, a multiple number of items as group can be tested simultaneously in a tester, to obtain the acceptance sampling plan under the truncated life test assuming that the life time of items is distributed as Gamma with known shape parameter (γ). The plan parameter such as the number of groups (k) and acceptance number will be determined by satisfying the consumer's and producer's risks at the specified ratio of true average life to the specified life, termination time and the number of tester. The tables are constructed and the results are explained.

Key words: Group Acceptance Sampling Plan, Consumer's and Producer's Risk, Truncated Life Test, Operating Characteristics O.C.

المقدمة:

غالباً ما يعتمد الفحص المتعدد في الواقع التطبيقي، حيث نفحص الوحدات انياً بشكل مجموعات عددها k، وكل مجموعة تتكون من r من الوحدات، باعتماد نظام GASP وهو مختصر المصطلح Group Acceptance Sampling، حيث ترسل الوحدات الى المختبر بشكل مجموعات حجم كل منها r وعددها k، وعندئذ تكون (n=r.k) ويسجل عدد المعيب لكل مجموعة، فاذا كان مجموع الوحدات المعيبة من كل المجموعات المختبرة اقل او يساوي c قبل انتهاء زمن الفحص المحدد، تقبل العينة ومن ثم تقبل الدفعة، اما اذا المجموع اكبر من c، ترفض العينة ومن ثم ترفض الدفعة، و ينفذ نظام الفحص GASP في وقت فحص مبتور عند نقطة زمنية معينة، وان زمن الفحص يعتبر متغير عشوائي له توزيع احتمالي معين. في هذا النوع من الفحوصات يتم تحديد حجم العينة من خلال تحديد عدد المجموعات k، وقد ناقش كثير من الباحثين هذا الموضوع مثل June Vleck (2003)[4] وقاموا بتطبيقه على اختبار الوحدات ذات الوفاة المفاجئة Sudden death testing، ويساهم GASP بتوفير الوقت والكلفة وضمان مراقبة مستمرة للمنتوج.

في هذا البحث، سيتم تحديد معلمات خطط عينات القبول تحت افتراض ان توزيع وقت الفحص هو متغير عشوائي يتبع توزيع گاما بمعلمة شكل معلومة (مفترضة) ومعلمة قياس تحدد حسب مستويات اوقات البتر، وتحدد المعلمات تحت شروط تحقق كل من مخاطرة المنتج ومخاطرة المستهلك.

اولاً: هدف البحث

يهدف البحث الى اقتراح GASP لتوزيع وقت الحياة المبتور عندما يكون وقت الحياة للوحدات المنتجة متغير عشوائي يتبع توزيع گاما بمعلمة شكل معلومة ومعلمة قياس تقدر باحدى طرق الاستدلال الاحصائي، ويتم الحصول على عدد المجموعات وعدد القبول انياً بشرط تحقق كل من مخاطرتي المنتج والمستهلك. وسوف ينضم البحث بحيث تخصص الفقرة الثانية الى تعريف مفهوم GASP، وتخصص الفقرة الثالثة المحاكاة ووصف الجداول الناتجة، وتخصص الفقرة الرابعة الى الاستنتاجات والتوصيات.

ثانياً: مفهوم خطط مجموعات عينات القبول GASP

لتكن المعلمة μ تمثل المتوسط الحقيقي لحياة الوحدات المنتجة، وان μ_o قيمة محددة (معرفة) يعتبر المنتوج مطابق للمواصفات ومقبول بالنسبة للمستهلك اذا كانت بيانات العينة المختارة عشوائياً منه تدعم الفرضية $(H_o : \mu = \mu_o)$، وعندما $(\mu < \mu_o)$ ترفض دفعة المنتوج.

وبالنسبة لخطط عينات القبول فان الفرضية المختبرة تعتمد على عدد الوحدات الفاشلة الموجودة في العينة قبل الوقت المحدد مسبقاً. فاذا كان عدد المعيب يزيد عن عدد مقبول c

ترفض العينة وترفض الدفعة، اما اذا كان عدد المعيب اقل او يساوي c تقبل العينة، ومن ثم تقبل الدفعة طبقاً لقرار قبول العينة.

وبالنسبة لمتوسط وقت الحياة μ فان الدفعة تقبل اذا وجد دليل قاطع بان $(\mu \geq \mu_o)$ عند مستويات محددة من مخاطرة المنتج وهي (احتمال رفض منتوج جيد)، ومخاطرة المستهلك وهي (احتمال مقبول منتوج غير جيد)، والخطوات التالية تلخص مفهوم GASP طبقاً لوقت الفحص المبتور:

١- نختار عدد من المجموعات k، وحجم كل مجموعة r من الوحدات، وعندئذ يكون حجم العينة الكلي (n=k.r)، نختار عدد قبول c او يسمى حد العمل Action Limit للمجموعة، وتنفذ تجارب الفحص لغاية الزمن t_o.

٢- تجري تجارب الفحص للمجموعات انياً، وتسجل عدد الوحدات الفاشلة لكل مجموعة.

٣- تقبل الدفعة اذا كان مجموع المعيب في كل المجموعات المختبرة k هو على الأكثر c اي $(x \leq c)$. وتقطع تجربة الفحص اذا وجد اكثر من c وحدة فاشلة ضمن اى مجموعة.

ولا بد من الاشارة الى مفهوم خطة المعاينة المفردة التي وضعها الباحث Hald والباحث Guenther واخرون، تشكل حالة خاصة من نظام GASP وسوف نعمل على ايجاد قيمة c وعدد المجموعات k، تحت شروط تحقق كل من مخاطرة المنتج والمستهلك في نفس الوقت، وحيث ان حجم كل مجموعة داخلة في الاختبار هو r، وينتهي الفحص عند نقطة زمنية محددة تمثل وقت الانتهاء هي t_o.

ان وقت الحياة للوحدات المختبرة (زمن استمرارها صالحة للعمل) هو متغير عشوائي له توزيع احتمالي معين قد يكون توزيع أسي Exponential distribution، او توزيع گاما Gamma distribution او توزيع ويبل Weibull distribution وغيرها. وفي بحثنا هذا سوف نفترض ان التوزيع الاحتمالي لوقت الحياة هو توزيع گاما، بمعلمة شكل γ (وتكون عدد صحيح موجب)، ونفترض انها معلومة، ومعلمة قياس θ اما تكون معلومة او تقدر باحدى طرائق الاستدلال الاحصائي مثل طريقة العزوم او الامكان الاعظم او غيرها، اي ان:

$$T \sim Gamma(\gamma, \theta)$$

ان الدالة الاحتمالية التركمية c.d.f للمتغير العشوائي هي:

$$F_T(t,\theta) = 1 - \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{e^{-(t/\theta)}(t/\theta)^j}{j!} \qquad t \geq 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

وعندما $(\gamma = 1)$ فان توزيع گاما يمثل التوزيع الأسي بمعلمة قياس θ.

ان متوسط وتباين توزيع گاما هما:

$$E(T) = \mu = \gamma\,\theta$$

$$V(T) = \sigma_t^2 = \gamma\,\theta^2$$

واذا كان حجم الدفعة الانتاجية كبير، وان قرار الفحص يستند الى قرارين اما القبول او الرفض، فمن الممكن استخدام توزيع ثنائي الحدين Binomial distribution لتطوير الخطط GASP، وطبقاً للخطط GASP، فان الدفعة المنتجة اما تقبل (اذا كان عدد المعيب اقل او يساوي c) في كل المجموعات k او ترفض. وعليه فان احتمال قبول الدفعة هو:

$$L(P)=\left[\sum_{i=0}^{c}\subset_{i}^{r}\ p^{i}\,(1-p)^{r-i}\ \right]^{k} \qquad \text{..... (2)}$$

ان نسبة المعيب p هنا تمثل احتمال فشل كل وحدة في اي مجموعة k مقدمة للفحص، وان هذه تفشل قبل زمن الانتهاء من التجربة t_o، ولعل من الطبيعي تحديد زمن الانتهاء t_o، كمضاعف وقت الحياة المحدد μ_o، وهنا سنفترض ان:

$$P=F_T(t_o)=1-\sum_{j=0}^{\gamma-1}\frac{e^{-(\frac{a\gamma}{\mu/\mu_o})}\left(\frac{a\gamma}{\mu/\mu_o}\right)^{j}}{j!} \qquad \text{..... (3)}$$

حيث ان النسبة ($\frac{\mu}{\mu_o}$) هي نسبة معدل الحياة الحقيقي للوحدة المنتجة الى قيمة محددة μ_o،

وتسمى ($\frac{\mu}{\mu_o}$) مستوى النوعية للمنتوج Quality level of product.

وتم الحصول على المعادلة (٣) بعد التعويض بالمقادير الآتية:

$$\mu=\gamma\,\theta \ \ \Rightarrow\ \ \theta=\frac{\mu}{\gamma}$$

$$t=a\,\mu_o$$

$$\Rightarrow\ \frac{t}{\theta}=\frac{a\,\mu_o}{(\frac{\mu}{\gamma})}=\frac{a\gamma}{(\frac{\mu}{\mu_o})}$$

$$\therefore\ e^{-\frac{t}{\theta}}=e^{-\frac{a\gamma}{(\frac{\mu}{\mu_o})}}$$

في المعادلة (١) والخاصة بـ c.d.f.

وكما ذكرنا مسبقاً، فان المنتوج يعتبر جيد وتقبل الدفعة في ضوء معلومات العينة، اذا كانت معلومات العينة تدعم الفرضية $(H_o : \mu \geq \mu_o)$، وترفض العينة ومن ثم الدفعة اذا كانت معلومات تساند الفرضية $(H_o : \mu < \mu_o)$، وان احتمال قبول دفعة غير جيدة يسمى مخاطرة المستهلك، واحتمال رفض دفعة جيدة يسمى مخاطرة المنتج، وان رغبة المستهلك هي طلب المنتوج عندما تكون قيمة مخاطرة المستهلك β صغيرة قدر الامكان، وايضاً يرغب المنتج في ان يكون احتمال رفض المنتج اصغر من α وعند مستوى نوعية عالية للمنتوج، اي ان $(\frac{\mu}{\mu_o} > 1)$.

ونظراً لان نظام الفحص GASP يستند الى عدة عينات في آن واحد، فان هذا يجعل الفحص ممتاز، مقارنة بفحص عينة واحدة تسحب عشوائياً من الدفعة N، طبقاً لنظام خطة المعاينة المفردة، وعليه فان هدف بحثنا كما ذكرنا هو تطوير GASP باستخدام وقت الفحص المبتور، واعتماد نظام خطط المعاينة للسيطرة على مخاطرة المستهلك والمنتج في آن واحد.

الاسلوب المقترح في هذه الخطط يعتمد على تحديد عدد المجموعات k وعدد القبول بشرط تحقق المتباينتان انياً وهما:

$$L(P / \mu/\mu_o = r_1) \leq \beta \qquad \text{.....} (4)$$

$$L(P / \mu/\mu_o = r_2) \geq 1-\alpha \qquad \text{.....} (5)$$

حيث ان r_1، r_2 تمثلان نسبة المتوسطات $(\frac{\mu}{\mu_o})$ المحددة عند مخاطرة المستهلك والمنتج.

ان النسبة العالية لـ $(\frac{\mu}{\mu_o})$ تمثل بالتاكيد مستوى النوعية العالي المطلوب، وعادة تؤخذ $(r_1=1)$. لنفرض ان p_1، p_2 هما احتمالات الفشل المناظرة لكل من مخاطرة المستهلك والمنتج على الترتيب، فان معلمات الخطة المقترحة يمكن تحديدها من خلال المتباينتين:

$$L(P_1) = \left[\sum_{i=0}^{c} \subset_i^r \, p^i (1-p)^{r-i} \right]^k \leq \beta \qquad \text{.....} (6)$$

$$L(P_2) = \left[\sum_{i=0}^{c} \subset_i^r \, p^i (1-p)^{r-i} \right]^k \geq 1-\alpha \qquad \text{.....} (7)$$

وبافتراض قيم ثابتة لكل من α, β, γ (معلمة الشكل)، وقيم ثابتة لـ a، حيث ان $(t = a\,\mu_o)$ وكتابة برنامج خاص بالمتباينتين (٦، ٧) بلغة فيجوال بيسك Visual Basic سيتم تحديد قيمة k، c التي تحقق المتباينتان (٦، ٧)، حيث اختيرت قيمة r (حجم كل مجموعة) $(r = 5, 10)$، وان قيم r_2 تمثل نسبة المتوسط الحقيقي μ الى قيمة متوسط البتر μ_o، حيث ان $\left(r_2 = \dfrac{\mu}{\mu_o}\right)$، وكانت قيم $(r_2 = 2, 4, 6, 8, 10)$.

اما r_1 فتمثل نسبة المتوسط الحقيقي الى قيمة متوسط البتر بحيث يكون احتمال القبول اقل او يساوي مخاطرة المستهلك، وكذلك تتعلق r_2 بمخاطرة المنتج، وهنا افترضنا ان $(r_1 = 1)$.

وحيث ان هدف البحث هو ايجاد معالم خطط GASP للحصول على القرار الامثل الذي يقلل كلا المخاطرتين، وقد تم البحث عن قيمتي k، c التي تحقق المتباينتان (٦، ٧)، وان مضاعف انتهاء وقت الاختبار والذي رمزنا له a سوف ناخذه هنا على مستويين هما $(a = 0.5, 1.0)$. والجدول رقم (١) يلخص حسابات اصغر قيمة لـ k، وقيمة عدد القبول c لنظام GASP عندما $(\gamma = 2)$.

جدول (أ) حسابات اصغر قيمة لـ k، وقيمة عدد القبول c لنظام GASP عندما $(\gamma = 2)$

β	$\frac{\mu}{\mu_0} = r_2$	r = 5						r =10					
		a=0.5			a=1.0			a=0.5			a=1.0		
		k	c	$L(p_2)$	k	c	$L(p_2)$	k	c	$L(p_2)$	k	c	$L(p_2)$
0.10	2	56	6	0.9781	20	4	0.9758	25	5	0.9563	16	4	0.9805
	4	45	5	0.9802	14	3	0.9873	20	4	0.9726	12	3	0.9911
	6	30	4	0.9955	8	2	0.9818	15	3	0.9935	8	2	0.9916
	8	25	3	0.9645	6	1	0.9970	8	2	0.9978	6	2	0.9972
	10	10	3	0.9975	4	1	0.9621	3	1	0.9911	4	1	0.9726
0.05	2	40	5	0.9535	35	6	0.9810	30	5	0.9903	18	5	0.9823
	4	35	4	0.9607	30	4	0.9639	22	2	0.9870	14	4	0.9916
	6	30	3	0.9910	20	3	0.9867	18	2	0.9955	12	3	0.9726
	8	20	2	0.9969	10	2	0.9970	15	1	0.9542	8	1	0.9874
	10	10	1	0.9542	5	1	0.9990	10	1	0.9541	6	1	0.9660
0.01	2	37	4	0.9934	25	5	0.9685	18	3	0.9865	15	3	0.9832
	4	30	2	0.9921	20	4	0.9639	16	2	0.9933	10	2	0.9832
	6	20	1	0.9850	15	3	0.9878	10	1	0.9971	8	1	0.9764
	8	10	1	0.9949	10	1	0.9954	8	1	0.9952	5	1	0.9913
	10	10	1	0.9978	7	1	0.9941	6	1	0.9961	4	1	0.9901

β	$\frac{\mu}{\mu_0} = r_2$	r = 5						r =10					
		a=0.5			a=1.0			a=0.5			a=1.0		
		k	c	$L(p_2)$	k	c	$L(p_2)$	k	c	$L(p_2)$	k	c	$L(p_2)$
0.10	2	20	2	0.9883	15	4	0.9776	12	4	0.9745	10	3	0.9727
	4	16	2	0.9978	10	3	0.9849	10	3	0.9962	7	2	0.9936
	6	10	1	0.9786	8	2	0.9980	8	2	0.9786	6	1	0.9981
	8	8	1	0.9905	6	2	0.9672	6	2	0.9905	4	1	0.9646
	10	6	0	0.9950	4	1	0.9821	4	1	0.9941	3	0	0.9850
0.05	2	32	6	0.9858	17	4	0.9821	14	3	0.9942	11	3	0.9981
	4	28	5	0.9925	15	3	0.9502	12	2	0.9811	10	2	0.9914
	6	20	4	0.9650	14	2	0.9700	10	1	0.9900	7	1	0.9624
	8	15	3	0.9952	12	1	0.9960	7	1	0.9875	6	1	0.9914
	10	10	2	0.9681	8	1	0.9672	6	0	0.9923	4	0	0.9800
0.01	2	13	2	0.9926	15	4	0.9823	20	3	0.9900	12	4	0.9702
	4	10	2	0.9992	14	3	0.9553	14	2	0.9898	10	3	0.9872
	6	8	1	0.9976	10	2	0.9940	13	1	0.9714	8	2	0.9914
	8	7	1	0.9754	8	1	0.9987	10	1	0.9850	7	1	0.9981
	10	6	0	0.9975	7	1	0.9646	8	0	0.9910	6	1	0.9646

يلاحظ من الجداول انه كلما ازدادت قيمة r_2، فان عدد المجموعات k وعدد القبول تتناقص في نفس الوقت.

من الجدول رقم (١) وعندما $(r_2 = 2)$ مثلاً، نلاحظ عندما تتغير a من ٠.٥ الى ١.٠، فان عدد المجموعات k يتغير من (k=56) الى (k=20)، ويمكن قراءة معالم خطط النظام GASP.

ومن الجدول مباشرة عندما $(r = 4)$ مثلاً، $(\beta = 0.10 \ , \gamma = 2 \ , \ a = 0.5)$، نجد ان:

$k = 45 \ , \ c = 5 \ , \ L(p_2) = 0.9802$

وتعني هذه الخطة فحص مجموعات عددها ٤٥ مجموعة، حجم كل مجموعة $(r = 5)$ وحدات، وهنا $(n = k \times r = 45 \times 5 = 225)$. فاذا كان عدد المعيب في العينة يساوي ٥ وحدات او اقل من ذلك تقبل العينة ومن ثم تقبل الدفعة. ومما يميز هذه الخطة انه تم فحص المجموعات انياً، وعددها (k=45) وكل مجموعة حجمها (r=5) وحدات، وهذا يجعل عملية الفحص كفوءة، مقارنة بالخطة المفردة (n, c) والتي يتم اختيارها عشوائياً وفحصها كاملة، فاذا كان عدد المعيب عندها اقل او يساوي c تقبل العينة n، ومن ثم تقبل الدفعة، وهذا النظام يعتمد على فحص مرة واحدة، ولكن النظام GASP يسمح بفحص عدة مجاميع في آن واحد وعند مستويات بتر لوقت الفحص الكلي، وهذا الفحص ذو قيمة كبيرة كما ذكرنا، لانه يجعل المسؤولين عن السيطرة النوعية في رقابة مستمرة للمنتوج، وهذا يجعل نسب المعيب في المنتوج الخارج من الفحص وهو ما يعرف Average outgoing quality level (AOQL) اصغر ما يمكن، مما يحقق ذلك طموحات المنتج والمستهلك.

رابعاً: الاستنتاجات والتوصيات

أ- الاستنتاجات:

في ضوء ما تقدم نستنتج:

١- ان مجموعات خطط المعاينة المقترحة والمجدولة في الجدول رقم (١) والجدول رقم (٢)، معتمدة على وقت الحياة للوحدات المختبرة هو متغير عشوائي يتبع توزيع گاما بمعلمة شكل معلومة $(\gamma = 3 \, ; \gamma = 2)$.

٢- استخرجت خطط المعاينة بافتراض حجم كل مجموعة هو$(r = 10 \ ; \ r = 5)$، ويمكن افتراض حجوم اخرى، وكذلك اخذت ثلاث قيم لمخاطرة المستهلك هي $(\beta = 0.10, \ 0.05, \ 0.01)$.

٣- ان المعلمات المستخرجة هي k (عدد المجموعات)، c عدد القبول (عدد الوحدات المعيبة المقبولة)، وان حجم العينة هو $(n = k \times r)$.

٤- خطط المعاينة المقترحة مفيدة من حيث الوقت والكلفة وتضمن مراقبة مستمرة للمنتوج.

ب- التوصيات:

١- نوصي بتصميم نموذج خطط المعاينة المقترحة GASP على توزيعات اخرى لنسب المعيب مثل ويبل، والطبيعي وغيرها.

٢- نوصي باعتماد نظام GASP لانه يوفر منتوج فيه قيمة AOQL تحقق مخاطرة المنتج والمستهلك.

References

1- Dodge, H. F. and Romig, H. G. (1959), "Sampling Inspection Tables", 2nd edn Willey, New York.

2- Gupta, R. D. and Kundu, D. (2003), "Closeness of Gamma and Generalized Exponential Distribution". Communications in Statistics Theory and Methods, Vol. 32, No. 4, pp 705-721.

3- Hald, aA. (1981), "Statistical Theory of Sampling Inspection by Attributes", Academic Press Inc. (London).

4- Jun, C. H. Vleck, B. L. (2003), "Monte Carlo Simulation of Sudden Death Bearing testing", NASA, Hanover MD. USA.

5- Kundu, D. (2004), "Parameter Estimation for partially Complete Time and Type Failure Data", Biometrical Journal, Vol. 46, pp 165-179.

6- Kundu, D. (2008), "Bayesian Inference and Life Testing Plan for Weibull Distribution", Technometrics, Vol. 50, pp 144-154.

7- Rosaiah, K. Kantan, R. R. L and Reddy, J. P (2008), "Economic Reliability Test Plan with Inverse Rayleigh Variate", Pak. J. of Statistics 24 (1), pp 57-65.