

# مقارنة مقرر بيز مع مقرر المربعات الصغرى لتقدير دالة المعولية

## التقريبية لتوزيع ويبيل

أ.د. مهدي محسن العلق\*

د. تهاني مهدي الياسري\*\*

### ملخص :

في هذا البحث سوف يتم توضيح كيفية توظيف أسلوب بيز في طريقة White لتقدير دالة المعولية لتوزيع ويبيل كأسلوب مقترح جديد لمعالجة هذه المشكلة ، إذ سيتم الاعتماد على دالة معلومات مسبقة والمتمثلة بالدالة المرافقة الطبيعية ومقارنة نتائج مقدرات بيز مع مقدرات الأماكن الأعظم لطريقة White وباستخدام أسلوب المحاكاة.

### Abstract:

In this paper we will explain, how to use Bayesian procedure in White method to estimate the reliability function for weibull distribution as a new method suggested, depending on natural conjugate prior p.d.f and to compare Bayesian estimator with Least Square estimator for White method by using simulation procedure.

### ١- المقدمة :

من الملاحظ إن معظم البحوث والدراسات في مجال الإحصاء ولاسيما في حقل المعولية تهدف إلى الحصول على مقدرات ذات مستوى عالٍ من الكفاءة. لكن قد تواجه الباحثين مشكلة صغر حجم العينة والتي تؤثر على طرائق التقدير في تقدير معالم توزيع هذه العينة ، كون هذه المقدرات تكون ذات كفاءة ضعيفة من هنا جاء هدف هذا البحث في الوصول إلى مقدرات كفوءة لدالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبيل الذي يعتبر احد نماذج الفشل الشائعة. من خلال دراسة طريقة White تم اقتراح تقدير معالم طريقة White باستخدام أسلوب بيز وبالاعتماد على دالة مسبقة مراقبة طبيعية لمعالجة هذه المشكلة إضافة لطريقة المربعات الصغرى والمقارنة بين الطريقتين باستخدام أسلوب المحاكاة اعتماداً على المقياسين الإحصائيين ، متوسط مربعات الخطأ التكاملية (Integral Mean Square Error (EMSE))، ومتوسط الخطأ النسبي المطلق

\* أستاذ ، رئيس الجهاز المركزي للأحصاء.

\*\* مدرس ، كلية العلوم ، جامعة بغداد.

التكاملي (EMAPE) (Integral Mean Absolute Percentage Error) لغرض المقارنة بين النتائج .

٢- طريقة **White** : [7] , [8]

أن فكرة هذه الطريقة هو استخدام دالة الكثافة التجميعية c.d.f لصياغة نموذج انحدار خطي بسيط وكما يأتي:

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^p}{\theta}}$$

$$1 - F(t) = e^{-\frac{t^p}{\theta}}$$

$$\ln[1 - F(t)] = -\frac{t^p}{\theta}$$

$$\ln[1 - F(t)]^{-1} = \frac{t_i^p}{\theta}$$

$$\underbrace{\ln \ln[1 - F(t)]^{-1}}_{y_i} = \underbrace{\rho \ln t_i}_{bx_i} - \underbrace{\ln \theta}_a \quad \dots(1)$$

أي تم الحصول على نموذج الانحدار الخطي الآتي:

$$y_i = a + bx_i + r_i \quad \dots(2)$$

إذ أن:

$r_i$ : يمثل متغير الخطأ العشوائي وأن  $i = 1, \dots, n$ .

ويتطبيق طريقة المربعات الصغرى (OLS) نحصل على:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x_i$$

$$\hat{b}_{LS} = \left. \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \right\} \dots(3)$$

وأن:

$$\hat{a}_{LS} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$$

ويمكن الحصول على  $\hat{\rho}$  و  $\hat{\theta}$  كما يأتي:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\rho} = b_{LS} \\ \hat{\theta} = e^{-\hat{a}_{LS}} \end{array} \right\} \dots(4)$$

وعليه فان مقدر White لدالة المعولية التقريبية يكون كما يأتي:

$$\hat{R}(t)_w = e^{-e^{\hat{\theta}t}} \dots(5)$$

### 3- مقدرات بيز القياسية: [1], [2], [3]

أن الطرائق التقليدية في التقدير تفترض المعلمة المطلوب تقديرها ثابتة وليست متغيرة. إذ يتم الاعتماد على بيانات العينة المُشاهدة فقط. أما طريقة بيز في التقدير فأنها تعتمد على المعلومات المسبقة حول المعلمة المطلوب تقديرها على اعتبار هذه المعلمة متغيرات عشوائية وليست كميات ثابتة ويضاف على تلك المعلومات المسبقة معلومات العينة المُشاهدة. وعلى هذا الأساس فإن مقدر بيز يعتمد على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة (Posterior p.d.f) وهي  $f(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n)$  الناتجة من دمج دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلمة مع دالة الخسارة المستخدمة لان هذه التقديرات يمكن الحصول عليها من خلال تقليل (minimize) دالة المخاطرة (risk function) والتي يرمز لها عادة بـ  $L = L(\hat{\theta}, \theta)$  أي:

$$\text{Min}_{\hat{\theta}} E[L(\hat{\theta}, \theta)] = \text{Min}_{\hat{\theta}} \int L(\hat{\theta}, \theta).f(\theta, t_1 \dots t_n) d\theta$$

ولدالة الخسارة أثر في تحديد مقدر بيز وتمثل الخسارة نتيجة إتخاذ القرار .

هناك عدة أنواع من دالة الخسارة ، أكثرها شيوعا واستخداما دالة الخسارة التربيعية والتي سيتم

اعتمادها في البحث وهي كما يأتي:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

إن موضوع تحديد نوع دالة الكثافة الاحتمالية المسبقة للمعلمة من المواضيع المهمة في دراسة تقدير المعلمة بأسلوب بيز حيث أن هذا التحديد يعتمد على نوع المعلومات المُسبقة المتوفرة لدى الباحث والتي تعكس درجة اعتقاده وتصوراتهِ حول المعلمة موضوع البحث حيث تُصاغ هذه المعلومات بشكل توزيع احتمالي مناسب. وأن أهم أنواع هذه الدوال هي الدالة المرفقة الطبيعية المسبقة ، ويتميز هذا النوع من الدوال بأنها دوال احتمالية معروفة المعلمة بالإضافة إلى كونها

دالة واضحة و محددة وملائمة ، والتي سوف يتم توظيفها في طريقة White (طريقة مقترحة) أي بالاعتماد على أنموذج الانحدار ، إذ يمكن صياغة دالة مسبقة للمعلمة ( للمعلمات) وكما يأتي :

لمتجه المتغيرات  $\underline{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  الذي يمثل مشاهدات عينة ذو توزيع طبيعي متعدد المتغيرات بالمعلمات  $(\underline{\mu}, \Sigma)$  وكما يأتي (\*):

$$(\underline{X} / \underline{\mu}, \Sigma) \sim MVN(\underline{\mu}, \Sigma)$$

وإن دالة الامكان تكون كما يأتي:

$$f(\underline{x} / \underline{\mu}, \Sigma) \propto |\Sigma|^{\frac{k+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\underline{x} - \underline{\mu})\right)$$

حيث k تمثل عدد المتغيرات

وعليه فإن الدالة المرافقة الطبيعية للمعلمات تكون :

$$(\underline{\mu} / \Sigma) \sim MVN(\underline{\mu}_0, \Sigma/n_0) \quad \dots(6)$$

$$(\Sigma) \sim Inv - Wishart(v_0, \Lambda_0^{-1}) \quad \dots(7)$$

إذ أن الصيغة (6) ما هي إلا توزيع متعدد المتغيرات بالمعلمات  $(\underline{\mu}_0, \Sigma/n_0)$  ، أما الصيغة (7) وهي توزيع معكوس وشارت (Inv - Wishart) بالمعلمة  $\Lambda_0^{-1}$  ودرجة حرية  $v_0$  ، ودمج الصيغتين (6) و (7) يتم الحصول على الدالة الاحتمالية المسبقة المشتركة متعدد متغيرات طبيعي - معكوس وشارت (MVN - Inv - Wishart) وبحسب الصيغة الآتية :

$$\pi(\underline{\mu}, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-\left(\frac{v_0+k}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}tr(\Lambda_0 \Sigma^{-1}) - \frac{n_0}{2}(\underline{\mu} - \underline{\mu}_0)' \Sigma^{-1}(\underline{\mu} - \underline{\mu}_0)\right) \dots(8)$$

وأن  $\underline{\mu}_0, \Lambda_0, n_0, v_0$  معلمات فوقية للتوزيع Hyper - Parameters.

وعليه فإن مقدر بيز يكون كما يأتي :

$$\tilde{\beta}_{Bayes} = (Q^{-1} + X'X)^{-1}(Q^{-1}\tilde{\beta}_0 + X'Y) \quad \dots(9)$$

حيث أن Q : مصفوفة معرفة موجبة Positive Definit.

\* لمزيد من المعلومات راجع المصدر [٦].

$\tilde{\beta}_0$ : تقدير المربعات الصغرى LS التي تحسب من المعلومات الأولية.

وعليه فان مقدر بيز لطريقة White في تقدير دالة المعولية التقريبية يكون كما يأتي:

$$\hat{R}(t)_{WB} = e^{-e^t} \quad \dots(10)$$

٤- المحاكاة: [1]

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الآتية:

**المرحلة الأولى:** وهذه المرحلة تعد من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة حيث يتم فيها اختيار القيم الافتراضية وكما يأتي:

١. تعيين حجوم العينات المفترضة وكما يأتي:

$$n = 10, 30, 50, 100$$

٢. اختيار قيم المعلمات الافتراضية كما مبينة بالجدول الآتي:

جدول رقم (١)

يبين قيم المعالم والنماذج المفترضة

| Model | $P_1$ | $\theta_1$ | $P_2$ | $\theta_2$ |
|-------|-------|------------|-------|------------|
| I     | 2     | 5          | 2     | 3          |
| II    | 1.5   | 5          | 2     | 3.5        |
| III   | 1     | 3          | 3     | 5          |

أن انتقاء هذه القيم مهم بسبب أن تغيير قيم المعلمات وحجوم العينات بأحجام مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة) سيعطي فكرة عن المقدرات ونمط سلوكها.

اما تكرار التجارب فقد كان مساوياً لـ (1000 = r) لكل تجربة.

**المرحلة الثانية:**

أ. توليد بيانات توزيع ويبيل وتوزيع ويبيل الملوث

يتم توليد بيانات توزيع ويبيل وذلك وفق لما يأتي:

١. باستخدام الصيغة الآتية:

$$t_i = \exp \left\{ \ln \left\{ \theta \ln \left( \frac{1}{1 - u_i} \right) \right\} \right\} / p \quad \dots(11)$$

إذ إن  $u_i$ : متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم ويتم توليده بالحاسبة الالكترونية من خلال الدالة:

$$U = \text{RND} (1) \quad \dots(12)$$

٢. وفق دالة التوليد المتوفرة في برنامج Matlab:

$$t = \text{weIrnd}(\alpha_0, b_0, [n \ 1]) \quad \dots(13)$$

### المرحلة الثالثة

في هذه المرحلة يتم تقدير دالة المعولية التقريبية لأنموذج ويبيل وفق طريقتي التقدير والمتمثلة بطريقة المربعات الصغرى وطريقة بيز .

### المرحلة الرابعة

وهي المرحلة الأخيرة حيث يتم فيها المقارنة بين طريقتي تقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبيل وذلك باستخدام المعايير الآتية:

١. متوسط مربعات الخطأ (MSE) وصيغته: [1]

$$MSE(\hat{R}(t)) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\hat{R}_i(t) - R(t))^2 \quad \dots(14)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

حيث  $r$  تمثل عدد المكررات لكل تجربة.

٢. متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) وفق الصيغة التالية: [1]

$$MAPE(\hat{R}(t)) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left| \frac{\hat{R}_i(t) - R(t)}{R(t)} \right| \quad \dots(15)$$

حيث أن المقياس الأول هو مقياس مطلق للمقارنة بين المقدرات اما المقياس الثاني فهو مقياس نسبي يستخدم لدقة القياسات في حالة كون المقدرات مختلفة وللمقارنات الدقيقة.

والجداول الآتية تبين تقدير دالة المعولية التقريبية ، ومتوسط مربعات الخطأ MSE ومتوسط الخطأ النسبي المطلق MAPE لتقدير دالة المعولية لجميع النماذج ولجميع حجوم العينات .

جدول رقم (٢)

تقدير دالة المعولية لجميع النماذج وحجوم العينات

| Model |     | I         |           |           | II  |           |           | III       |     |           |           |           |
|-------|-----|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|
| n     | t   | Real      | White     | B.White   | t   | Real      | White     | B.White   | t   | Real      | White     | B.White   |
| 10    | 0.2 | 0.9920319 | 0.9724078 | 0.9872971 | 0.1 | 0.9843313 | 0.9644828 | 0.9680244 | 0.1 | 0.9672161 | 0.8594201 | 0.8825437 |
|       | 0.5 | 0.9512295 | 0.9481503 | 0.9487236 | 0.3 | 0.9211261 | 0.9055247 | 0.9073641 | 0.5 | 0.8464817 | 0.8035733 | 0.8125148 |
|       | 0.8 | 0.8798534 | 0.8543196 | 0.8643795 | 0.5 | 0.8379669 | 0.8296497 | 0.8304405 | 0.9 | 0.7408182 | 0.7289821 | 0.7306183 |
|       | 1.1 | 0.7850562 | 0.7162592 | 0.7374051 | 0.7 | 0.7461482 | 0.7421569 | 0.7427474 | 1.3 | 0.6483443 | 0.6440383 | 0.6435865 |
|       | 1.4 | 0.6757041 | 0.5984415 | 0.6064157 | 0.9 | 0.6525239 | 0.6493142 | 0.6504819 | 1.7 | 0.5674137 | 0.5623786 | 0.5614638 |
|       | 1.6 | 0.5992958 | 0.5377614 | 0.5320731 | 1.1 | 0.5616677 | 0.5580907 | 0.5600679 | 2.1 | 0.4965853 | 0.4942580 | 0.4917729 |
|       | 1.8 | 0.5230909 | 0.4894954 | 0.4703965 | 1.3 | 0.4765827 | 0.4745362 | 0.4769125 | 2.5 | 0.4345982 | 0.4413243 | 0.4363770 |
|       | 2.0 | 0.4493290 | 0.4509297 | 0.4200592 | 1.5 | 0.3990939 | 0.4018404 | 0.4041087 | 2.8 | 0.3932407 | 0.4100411 | 0.4031320 |
|       | 2.2 | 0.3798420 | 0.4196700 | 0.3789685 | 1.7 | 0.3301314 | 0.3407165 | 0.3424649 | 3.2 | 0.3441538 | 0.3769435 | 0.3675910 |
|       | 2.3 | 0.3471494 | 0.4062000 | 0.3612621 | 1.9 | ٠.٢٦٩٦٠٩٢ | ٠.٢٩٠٤٧٩٦ | ٠.٢٩١٤٢٣٥ | 3.6 | 0.3011942 | 0.3511643 | 0.3397031 |
| 30    | 0.2 | 0.9920319 | 0.9895322 | 0.9897342 | 0.1 | 0.2699592 | 0.2904796 | 0.2914235 | 0.1 | 0.9672161 | 0.9398068 | 0.9403307 |
|       | 0.5 | 0.9512295 | 0.9511740 | 0.9511812 | 0.3 | 0.9843130 | 0.9804085 | 0.9804132 | 0.5 | 0.8464817 | 0.8372270 | 0.8372437 |
|       | 0.8 | 0.8798534 | 0.8751335 | 0.8754547 | 0.5 | 0.9211261 | 0.9163404 | 0.9163060 | 0.9 | 0.7408182 | 0.7402363 | 0.7401320 |
|       | 1.1 | 0.7850562 | 0.7643987 | 0.7656736 | 0.7 | 0.8379669 | 0.8343264 | 0.8342866 | 1.3 | 0.6483443 | 0.6488106 | 0.6488129 |
|       | 1.4 | 0.6757041 | 0.6418239 | 0.6434488 | 0.9 | 0.7461482 | 0.7434556 | 0.7434537 | 1.7 | 0.5674137 | 0.5659925 | 0.5661841 |
|       | 1.6 | 0.5992958 | 0.5656058 | 0.5668916 | 1.1 | 0.6525239 | 0.6502243 | 0.6502904 | 2.1 | 0.4965853 | 0.4938208 | 0.4941657 |
|       | 1.8 | 0.5230909 | 0.4980748 | 0.4987000 | 1.3 | 0.5616677 | 0.5595987 | 0.5597416 | 2.5 | 0.4345982 | 0.4327599 | 0.4331750 |
|       | 2.0 | 0.4493290 | 0.4401081 | 0.4399112 | 1.5 | 0.4765827 | 0.4751540 | 0.4753619 | 2.8 | 0.3932407 | 0.3937971 | 0.3942143 |
|       | 2.2 | 0.3798420 | 0.3911528 | 0.3901117 | 1.7 | 0.3990939 | 0.3991342 | 0.3993821 | 3.2 | 0.3441538 | 0.3498375 | 0.3502080 |
|       | 2.3 | 0.3471494 | 0.3696990 | 0.3682567 | 1.9 | 0.3301314 | 0.3325981 | 0.3328569 | 3.6 | 0.3011942 | 0.3135915 | 0.3138796 |
| 50    | 0.2 | 0.9920319 | 0.9904369 | 0.9904596 | 0.1 | 0.2699592 | 0.2756620 | 0.2759062 | 0.1 | 0.9672161 | 0.9531199 | 0.9532267 |
|       | 0.5 | 0.9512295 | 0.9504777 | 0.9504790 | 0.3 | 0.9843130 | 0.9820863 | 0.9820920 | 0.5 | 0.8464817 | 0.8396509 | 0.8397104 |
|       | 0.8 | 0.8798534 | 0.8765027 | 0.8765526 | 0.5 | 0.9211261 | 0.9181731 | 0.9181787 | 0.9 | 0.7408182 | 0.7379159 | 0.7379465 |
|       | 1.1 | 0.7850562 | 0.7728710 | 0.7730809 | 0.7 | 0.8379669 | 0.8356315 | 0.8356342 | 1.3 | 0.6483443 | 0.6465052 | 0.6455259 |
|       | 1.4 | 0.6757041 | 0.6543739 | 0.6547218 | 0.9 | 0.7461482 | 0.7444209 | 0.7444214 | 1.7 | 0.5674137 | 0.5631894 | 0.5632079 |
|       | 1.6 | 0.5992958 | 0.5764220 | 0.5767670 | 1.1 | 0.6525239 | 0.6511444 | 0.6511442 | 2.1 | 0.4965853 | 0.4912871 | 0.4913024 |
|       | 1.8 | 0.5230909 | 0.5043418 | 0.5045978 | 1.3 | 0.5616677 | 0.5605717 | 0.5605713 | 2.5 | 0.4345982 | 0.4294727 | 0.4294789 |
|       | 2.0 | 0.4493290 | 0.4403253 | 0.4404309 | 1.5 | 0.4765827 | 0.4760117 | 0.4760106 | 2.8 | 0.3932407 | 0.3892542 | 0.3892491 |
|       | 2.2 | 0.3798420 | 0.3849368 | 0.3848644 | 1.7 | 0.3990939 | 0.3995179 | 0.3995149 | 3.2 | 0.3441538 | 0.3429634 | 0.3429383 |
|       | 2.3 | 0.3471494 | 0.3603595 | 0.3601965 | 1.9 | 0.3301314 | 0.3320947 | 0.3320884 | 3.6 | 0.3011942 | 0.3039863 | 0.3039375 |
| 100   | 0.2 | 0.9920319 | 0.9913996 | 0.9914038 | 0.1 | 0.2699592 | 0.7239285 | 0.2739177 | 0.1 | 0.9672161 | 0.9622066 | 0.9622135 |
|       | 0.5 | 0.9512295 | 0.9511730 | 0.9511738 | 0.3 | 0.9843130 | 0.9832082 | 0.9832088 | 0.5 | 0.8464817 | 0.8446928 | 0.8446985 |
|       | 0.8 | 0.8798534 | 0.8782209 | 0.8782215 | 0.5 | 0.9211261 | 0.9197272 | 0.9197276 | 0.9 | 0.7408182 | 0.7407933 | 0.7407989 |
|       | 1.1 | 0.7850562 | 0.7780474 | 0.7780575 | 0.7 | 0.8379669 | 0.8370571 | 0.8370571 | 1.3 | 0.6483443 | 0.6482356 | 0.6482447 |
|       | 1.4 | 0.6757041 | 0.6623841 | 0.6624013 | 0.9 | 0.7461482 | 0.7457550 | 0.7457545 | 1.7 | 0.5674137 | 0.5664887 | 0.5665008 |
|       | 1.6 | 0.5992958 | 0.5838339 | 0.5838445 | 1.1 | 0.6525239 | 0.6524934 | 0.6524928 | 2.1 | 0.4965853 | 0.4949125 | 0.4949272 |
|       | 1.8 | 0.5230909 | 0.5086279 | 0.5086191 | 1.3 | 0.5616677 | 0.5619078 | 0.5619073 | 2.5 | 0.4345982 | 0.4326892 | 0.4327053 |
|       | 2.0 | 0.4493290 | 0.4394343 | 0.4393954 | 1.5 | 0.4765827 | 0.4771388 | 0.4771383 | 2.8 | 0.3932407 | 0.3916024 | 0.3916188 |
|       | 2.2 | 0.3798420 | 0.3777021 | 0.3776266 | 1.7 | 0.3990939 | 0.4001303 | 0.4001299 | 3.2 | 0.3441538 | 0.3434848 | 0.3435004 |
|       | 2.3 | 0.3471494 | 0.3497998 | 0.3497052 | 1.9 | 0.3301314 | 0.3318707 | 0.3318701 | 3.6 | 0.3011942 | 0.3021087 | 0.3021228 |

جدول رقم (3)

متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير دالة المعولية ولجميع النماذج ولجميع حجوم العينة

| Model | I   |           |           | II  |           |           | III |           |           |
|-------|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| n     | t   | White     | B.White   | t   | White     | B.White   | t   | White     | B.White   |
| 10    | 0.2 | 0.0063158 | 0.0002916 | 0.1 | 0.0048789 | 0.0031736 | 0.1 | 0.0692496 | 0.0477314 |
|       | 0.5 | 0.0003938 | 0.0003388 | 0.3 | 0.0051023 | 0.0042099 | 0.5 | 0.0231406 | 0.0176962 |
|       | 0.8 | 0.0120420 | 0.0042636 | 0.5 | 0.0053922 | 0.0048956 | 0.9 | 0.0083654 | 0.0076252 |
|       | 1.1 | 0.0588710 | 0.0282057 | 0.7 | 0.0062603 | 0.0059770 | 1.3 | 0.0088271 | 0.0080235 |
|       | 1.4 | 0.0972698 | 0.0633650 | 0.9 | 0.0091145 | 0.0087088 | 1.7 | 0.0206497 | 0.0172710 |
|       | 1.6 | 0.1113191 | 0.0798839 | 1.1 | 0.0145367 | 0.0135675 | 2.1 | 0.0357875 | 0.0301063 |
|       | 1.8 | 0.1191568 | 0.0891188 | 1.3 | 0.0209060 | 0.0193473 | 2.5 | 0.0489160 | 0.0417582 |
|       | 2.0 | 0.1245127 | 0.0934239 | 1.5 | 0.0265295 | 0.0245083 | 2.8 | 0.0568689 | 0.0488475 |
|       | 2.2 | 0.1300328 | 0.0955599 | 1.7 | 0.0308180 | 0.0284374 | 3.2 | 0.0654902 | 0.0563903 |
|       | 2.3 | 0.1332645 | 0.0964421 | 1.9 | 0.0337956 | 0.0311351 | 3.6 | 0.0726551 | 0.0624405 |
| 30    | 0.2 | 0.0001002 | 0.0000871 | 0.1 | 0.0002489 | 0.0002453 | 0.1 | 0.0091171 | 0.0087698 |
|       | 0.5 | 0.0000927 | 0.0000921 | 0.3 | 0.0009616 | 0.0009560 | 0.5 | 0.0050964 | 0.0049792 |
|       | 0.8 | 0.0017556 | 0.0016418 | 0.5 | 0.0014829 | 0.0014785 | 0.9 | 0.0026465 | 0.0026192 |
|       | 1.1 | 0.0139401 | 0.0129226 | 0.7 | 0.0019425 | 0.0019387 | 1.3 | 0.0030029 | 0.0029909 |
|       | 1.4 | 0.0370899 | 0.0350157 | 0.9 | 0.0027663 | 0.0027553 | 1.7 | 0.0067753 | 0.0066887 |
|       | 1.6 | 0.0516714 | 0.0492489 | 1.1 | 0.0041758 | 0.0041465 | 2.1 | 0.0127339 | 0.0125285 |
|       | 1.8 | 0.0625387 | 0.0600049 | 1.3 | 0.0059962 | 0.0059422 | 2.5 | 0.0189976 | 0.0186900 |
|       | 2.0 | 0.0696175 | 0.0670712 | 1.5 | 0.0078083 | 0.0077323 | 2.8 | 0.0231688 | 0.0228059 |
|       | 2.2 | 0.0740511 | 0.0714605 | 1.7 | 0.0092224 | 0.0091328 | 3.2 | 0.0277163 | 0.0273046 |
|       | 2.3 | 0.0756843 | 0.0730387 | 1.9 | 0.0100460 | 0.0099518 | 3.6 | 0.0311708 | 0.0307290 |
| 50    | 0.2 | 0.0000394 | 0.0000385 | 0.1 | 0.0000997 | 0.0000993 | 0.1 | 0.0023467 | 0.0023196 |
|       | 0.5 | 0.0000574 | 0.0000572 | 0.3 | 0.0005092 | 0.0005081 | 0.5 | 0.0026714 | 0.0026558 |
|       | 0.8 | 0.0008260 | 0.0008140 | 0.5 | 0.0008256 | 0.0008245 | 0.9 | 0.0016087 | 0.0016039 |
|       | 1.1 | 0.0067176 | 0.0065978 | 0.7 | 0.0010969 | 0.0010959 | 1.3 | 0.0016734 | 0.0016713 |
|       | 1.4 | 0.0208272 | 0.0204863 | 0.9 | 0.0015786 | 0.0015771 | 1.7 | 0.0035550 | 0.0035448 |
|       | 1.6 | 0.0320721 | 0.0316071 | 1.1 | 0.0024078 | 0.0024046 | 2.1 | 0.0067813 | 0.0067554 |
|       | 1.8 | 0.0418039 | 0.0412731 | 1.3 | 0.0034915 | 0.0034856 | 2.5 | 0.0104777 | 0.0104341 |
|       | 2.0 | 0.0487582 | 0.0482066 | 1.5 | 0.0045901 | 0.0045812 | 2.8 | 0.0131136 | 0.0130581 |
|       | 2.2 | 0.0530348 | 0.0524772 | 1.7 | 0.0054650 | 0.0054537 | 3.2 | 0.0161148 | 0.0160463 |
|       | 2.3 | 0.0544012 | 0.0538389 | 1.9 | 0.0059791 | 0.0059662 | 3.6 | 0.0184146 | 0.0183361 |
| 100   | 0.2 | 0.0000153 | 0.0000152 | 0.1 | 0.0000429 | 0.0000429 | 0.1 | 0.0005653 | 0.0005643 |
|       | 0.5 | 0.0000311 | 0.0000311 | 0.3 | 0.0002616 | 0.0002614 | 0.5 | 0.0010942 | 0.0010929 |
|       | 0.8 | 0.0004264 | 0.0004248 | 0.5 | 0.0004460 | 0.0004458 | 0.9 | 0.0007705 | 0.0007700 |
|       | 1.1 | 0.0033959 | 0.0033808 | 0.7 | 0.0005861 | 0.0005859 | 1.3 | 0.0008365 | 0.0008363 |
|       | 1.4 | 0.0110463 | 0.0109984 | 0.9 | 0.0007991 | 0.0007990 | 1.7 | 0.0016581 | 0.0016572 |
|       | 1.6 | 0.0179082 | 0.0178352 | 1.1 | 0.0011663 | 0.0011661 | 2.1 | 0.0030900 | 0.0030877 |
|       | 1.8 | 0.0245346 | 0.0244418 | 1.3 | 0.0016683 | 0.0016678 | 2.5 | 0.0048012 | 0.0047971 |
|       | 2.0 | 0.0297353 | 0.0292695 | 1.5 | 0.0022077 | 0.0022069 | 2.8 | 0.0060772 | 0.0060719 |
|       | 2.2 | 0.0330476 | 0.0329335 | 1.7 | 0.0026685 | 0.0026674 | 3.2 | 0.0075931 | 0.0075863 |
|       | 2.3 | 0.0340273 | 0.0339099 | 1.9 | 0.0029656 | 0.0029643 | 3.6 | 0.0087947 | 0.0087869 |



جدول رقم (4)

متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لتقدير دالة المعولية لجميع النماذج وجميع حجوم العينة

| Model | I   |           |           | II  |           |           | III |           |           |
|-------|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| n     | t   | White     | B.White   | t   | White     | B.White   | t   | White     | B.White   |
| 10    | 0.2 | 0.0244778 | 0.0090455 | 0.1 | 0.0293646 | 0.0254006 | 0.1 | 0.1327546 | 0.1085021 |
|       | 0.5 | 0.0154630 | 0.0144731 | 0.3 | 0.0515541 | 0.0481333 | 0.5 | 0.1196937 | 0.1067808 |
|       | 0.8 | 0.0767929 | 0.0530684 | 0.5 | 0.0667444 | 0.0641426 | 0.9 | 0.0940431 | 0.0902330 |
|       | 1.1 | 0.2146817 | 0.1537077 | 0.7 | 0.0839110 | 0.0822657 | 1.3 | 0.1138525 | 0.1090498 |
|       | 1.4 | 0.0669882 | 0.2893925 | 0.9 | 0.1171053 | 0.1147340 | 1.7 | 0.1982482 | 0.1825309 |
|       | 1.6 | 0.4714555 | 0.3867118 | 1.1 | 0.1720912 | 0.1670126 | 2.1 | 0.3077886 | 0.2822956 |
|       | 1.8 | 0.5825213 | 0.4879848 | 1.3 | 0.2435823 | 0.2348904 | 2.5 | 0.4217663 | 0.3887348 |
|       | 2.0 | 0.7065627 | 0.5966163 | 1.5 | 0.3301428 | 0.3173293 | 2.8 | 0.5075502 | 0.4694701 |
|       | 2.2 | 0.8518528 | 0.7181625 | 1.7 | 0.4294358 | 0.4126080 | 3.2 | 0.6241623 | 0.5788875 |
|       | 2.3 | 0.9355353 | 0.7860548 | 1.9 | 0.5435537 | 0.5218898 | 3.6 | 0.7454848 | 0.6921670 |
| 30    | 0.2 | 0.0059470 | 0.0056842 | 0.1 | 0.0098381 | 0.0097989 | 0.1 | 0.0462310 | 0.0455174 |
|       | 0.5 | 0.0079453 | 0.0079124 | 0.3 | 0.0250932 | 0.0250328 | 0.5 | 0.0610579 | 0.0604601 |
|       | 0.8 | 0.0350015 | 0.0340286 | 0.5 | 0.0358551 | 0.0357916 | 0.9 | 0.0550166 | 0.0547364 |
|       | 1.1 | 0.1090168 | 0.1055008 | 0.7 | 0.0465664 | 0.0465194 | 1.3 | 0.0666482 | 0.0665254 |
|       | 1.4 | 0.2186829 | 0.2124806 | 0.9 | 0.0638262 | 0.0637039 | 1.7 | 0.1125331 | 0.1118912 |
|       | 1.6 | 0.3045512 | 0.2968495 | 1.1 | 0.0911455 | 0.0908540 | 2.1 | 0.1779487 | 0.1765946 |
|       | 1.8 | 0.3984922 | 0.3894424 | 1.3 | 0.1290895 | 0.1285466 | 2.5 | 0.2522189 | 0.2501307 |
|       | 2.0 | 0.5015091 | 0.4910944 | 1.5 | 0.1766543 | 0.1757675 | 2.8 | 0.3108556 | 0.3083290 |
|       | 2.2 | 0.6170210 | 0.6049517 | 1.7 | 0.2318060 | 0.2307375 | 3.2 | 0.3915840 | 0.3884460 |
|       | 2.3 | 0.6810216 | 0.6679459 | 1.9 | 0.2953494 | 0.2939858 | 3.6 | 0.4751033 | 0.4715109 |
| 50    | 0.2 | 0.0043394 | 0.0043018 | 0.1 | 0.0070055 | 0.0069957 | 0.1 | 0.0302063 | 0.0300780 |
|       | 0.5 | 0.0062706 | 0.0062627 | 0.3 | 0.0185905 | 0.0185715 | 0.5 | 0.0475114 | 0.0473848 |
|       | 0.8 | 0.0252440 | 0.0250737 | 0.5 | 0.0266340 | 0.0266153 | 0.9 | 0.0426655 | 0.0426046 |
|       | 1.1 | 0.0797837 | 0.0791353 | 0.7 | 0.0348152 | 0.0348001 | 1.3 | 0.0499843 | 0.0499563 |
|       | 1.4 | 0.1663632 | 0.1650615 | 0.9 | 0.0482443 | 0.0482222 | 1.7 | 0.0822053 | 0.0820921 |
|       | 1.6 | 0.2387146 | 0.2369737 | 1.1 | 0.0693278 | 0.0692834 | 2.1 | 0.1309350 | 0.1306923 |
|       | 1.8 | 0.3205947 | 0.3184521 | 1.3 | 0.0981814 | 0.0981021 | 2.5 | 0.1873428 | 0.1869612 |
|       | 2.0 | 0.4116206 | 0.4090886 | 1.5 | 0.1346792 | 0.1345562 | 2.8 | 0.2327909 | 0.2323031 |
|       | 2.2 | 0.5132945 | 0.5103458 | 1.7 | 0.1781264 | 0.1779510 | 3.2 | 0.2965624 | 0.2959325 |
|       | 2.3 | 0.5690597 | 0.5658718 | 1.9 | 0.2282769 | 0.2280388 | 3.6 | 0.3632705 | 0.3624940 |
| 100   | 0.2 | 0.0028992 | 0.0028924 | 0.1 | 0.0048957 | 0.0048941 | 0.1 | 0.0171396 | 0.0171276 |
|       | 0.5 | 0.0046498 | 0.0046485 | 0.3 | 0.0137713 | 0.0137676 | 0.5 | 0.0309665 | 0.0309492 |
|       | 0.8 | 0.0182270 | 0.0181950 | 0.5 | 0.0201507 | 0.0201464 | 0.9 | 0.0293163 | 0.0293063 |
|       | 1.1 | 0.0573798 | 0.0572592 | 0.7 | 0.0261721 | 0.0261683 | 1.3 | 0.0356310 | 0.0356271 |
|       | 1.4 | 0.1213166 | 0.1210602 | 0.9 | 0.0347154 | 0.0347117 | 1.7 | 0.0572970 | 0.0572831 |
|       | 1.6 | 0.1769801 | 0.1766177 | 1.1 | 0.0483403 | 0.0483347 | 2.1 | 0.0892462 | 0.0892149 |
|       | 1.8 | 0.2419959 | 0.2415203 | 1.3 | 0.0680751 | 0.0680647 | 2.5 | 0.1270067 | 0.1269544 |
|       | 2.0 | 0.3158455 | 0.3152495 | 1.5 | 0.0938203 | 0.0938029 | 2.8 | 0.1582740 | 0.1582052 |
|       | 2.2 | 0.3987962 | 0.3980654 | 1.7 | 0.1252963 | 0.1252700 | 3.2 | 0.2024815 | 0.2023919 |
|       | 2.3 | 0.4440671 | 0.4432609 | 1.9 | 0.1617230 | 0.1616871 | 3.6 | 0.2494029 | 0.2492899 |

## 5 - تفسير النتائج:

يتضح من النتائج في الجداول (٢) و (٣) و (٤) المذكور أنفا الأتي:  
⊗ لجميع النماذج ولجميع حجوم العينات نلاحظ تناقص MSE و MAPE عند زيادة حجم العينة .  
⊗ نلاحظ أن أسلوب بيز بالتقدير B.White كان هو أفضل لجميع النماذج وخاصة عند حجوم العينة الصغيرة من مقدر المربعات الصغرى لطريقة White .  
⊗ نلاحظ أن عند أحجام العينة الكبيرة اقترب مقدر بيز B.White من مقدر المربعات الصغرى لطريقة White ولجميع النماذج.

## ٦- الاستنتاجات:

يلاحظ من النتائج المذكورة في المبحث السابق أفضلية مقدر B.White ولجميع الحالات المفترضة من نماذج مفترضه وحجوم عينات ويرجع ذلك إلى توضيف المعلومات الأولية في التقدير ، بصورة أخرى ، أن المعلومات الأولية زادت من وفرة المعلومات حول المعلمة المراد تقديرها. لذا نوصي باستخدام هذا المقدر B.White في حاله حساب دالة المعولية التقريبية باستخدام طريقة White وخاصة لأحجام العينة الصغيرة.

## (٧) المصادر:

- [1] الياسري ، تهاني مهدي عباس ، (2007) "مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات أخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع وبيبل" أطروحة دكتوراه فلسفة في الإحصاء ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد.
- [2] Carlin , J.B ; Gelman , A. ; Rubin , D.B & Stern , H.S (2004) "Bayesian Data Analysis" 2<sup>nd</sup> ed. , Chapman & Hall, New York.
- [3] Box, G. E. P and Tiao, G. C. (1992). "Bayesian Inference in Statical Analysis" John wiley and Sons. Inc. New York.
- [4] Charles, E. E. (1997). "An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering" the Mcgrau Hial, companies, Inc. New York.
- [5] Crowder, M. J., Kimber, A. C., Smith, R. L., and Sweeting, T. J. (1991). "Statistical Analysis of Reliability Data". Chapman and Hall. Great Britain.
- [6] Rowe, D.R. (2003) "Multivariate Bayesian statistics" John Wile & Sons, New York.
- [7] Lewis, E. E. (1994). "Introduction of Reliability engineering" 2nd edition, wiley, New York.
- [8] Sinha, S. K. and Kate, B. K. (1980). "Life Testing and Reliability" wiley Eastern limited