

استخدام البرمجة الخطية في تحديد خطة الإنتاج المثلى وتحليل الحساسية لها

محمد وفي الشمري/ مدرس كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء

ملخص:-

تضمنت الدراسة أهمية الاستخدام الأمثل للموارد المحدودة للوحدة الاقتصادية بما يضمن تحقيق أقصى الأرباح بهدف تحقيق النمو وقرار للوحدة الاقتصادية فكانت مشكلة البحث إن الأسلوب التقليدي في وضع خطة الإنتاج قائم على أساس التقدير والاجتهاد الشخصي وبالتالي فهو لا يوفر معلومات ملائمة تساعد الإدارة في اتخاذ القرارات اللازمة لتحقيق النمو والاستقرار للوحدة الاقتصادية. وقد تم اختبار فرضية البحث التي تنص على أن استخدام البرمجة الخطية في وضع خطة الإنتاج يؤدي إلى توفير معلومات ملائمة تساعد الإدارة في تحديد خطة الإنتاج المثلى التي تحقق أقصى الأرباح. وقد تم استعراض مشكلة وفق نموذج البرمجة الخطية وحلها، ثم بيان التفسير الاقتصادي للحل الأمثل وتحليل الحساسية له، حيث تم تحليل الطاقات العاطلة، ثم بيان مفهوم أسعار الظل وقد تم استعراض خواص أسعار الظل التجميعية والتحليلية و التجنيسية والتقويم الاقتصادي لأوجه النشاط، ثم بيان المستوى التوازني الذي يتعادل عنده الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية.

Abstract:

The study included the importance of the perfect and ideal utilization of the limited resources of the economical unit. This will ensure the realization of maximum profits in order to secure the development and stability of the economical unit. The problem of the research was that the traditional manner to put the development and the stability of the economical unit. The hypothesis that says that the use of linear programming to put the production plan leads to providing relevant information was put under test. It is said that this hypothesis may help the management to specify the ideal production plan which will realize the maximum profits. A problem was surveyed in accordance with a linear programming model and then it's solution and then explaining the optimal solution economically , later sensitivity analysis towards it. The ideal capacity was analyzed. The meaning of shadow prices were surveyed (Collectively , analytically , classificatively and economical evaluation of activity aspects). Showing the balanced level at which the marginal revenue and marginal cost are in equilibrium

المقدمة ومنهجية البحث

إن صعوبات محدودية الموارد التي تواجه عمليات الإنتاج كانت دافعاً أساسياً للبحث عن طرق علمية تساعد في اتخاذ القرارات التي تؤدي إلى الاستخدام الأمثل لتلك الموارد المحدودة بما يضمن تحقيق أكبر عائد ممكن . وإن إحدى نماذج اتخاذ القرار بخصوص وضع خطة إنتاج تؤدي إلى الاستخدام الأمثل للموارد المحدودة وبحقق أقصى عائد من الأرباح هو نموذج البرمجة الخطية. ولم يكن في السابق استعمال البرمجة الخطية عملياً في كثير من الحالات وذلك لصعوبة حل كثير من معادلتها المعقدة يدوياً . إلا أن ظهور الحاسبات الالكترونية وتطويرها سهل حل كثير من المعادلات حتى ان الحصول على الحل اصبح سريعاً الأمر الذي زاد من استخدام وأهمية هذا الأسلوب وهكذا فان منهجية البحث ستكون كالآتي :-

مشكلة البحث

إن الأسلوب التقليدي المتبع حالياً في وضع خطة الإنتاج قائم على أساس التقدير والاجتهاد الشخصي وبالتالي فهو لا يوفر معلومات ملائمة تساعد الإدارة على اتخاذ القرارات الصائبة .

فرضية البحث

لقد استند هذا البحث إلى فرضية أساسية مفادها :-

إن استخدام البرمجة الخطية في وضع خطة الإنتاج يؤدي الى توفير معلومات ملائمة تساعد الإدارة في تحديد خطة الإنتاج المثلى التي تحقق أقصى عائد من الأرباح.

هدف البحث

يهدف هذا البحث الى تحديد خطة الإنتاج الممكن إنتاجها وبيعها والتي تحقق أقصى عائد من الأرباح باستخدام البرمجة الخطية وتحليل الحساسية لها .

2- البرمجة الخطية:

2-1 تعريف البرمجة الخطية :

تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي يهدف الى تحليل البدائل المختلفة تمهيداً لاختيار أفضلها من وجهة نظر الوحدة الاقتصادية وذلك على ضوء الهدف المرغوب تحقيقه , هذا فضلاً عن ان هذا الأسلوب في التحليل يأخذ في الاعتبار القيود المفروضة على الإنتاج . (نور , 1989 ص 386) .

كما عرفت بأنها أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها بإحدى الطرق ومن أهمها : الطريقة البيانية , الطريقة المبسطة , نماذج النقل والتوزيع , طريقة التعيين أو التخصيص . (المشريقي والقاضي , 1997 , ص 21) .

2-2 فرضيات البرمجة الخطية :

أن الشكل الرياضي لمسألة البرمجة الخطية تحوي على تعابير رياضية معينة أحدها يبين دالة الهدف , أما الباقي فهي المحددات . وأن مسألة البرمجة الخطية تهدف الى إيجاد ضل حل لدالة الهدف بشرط التوافق مع المحددات أو القيود , ومن أجل ذلك فأن علينا اعتبار عدة فرضيات هي : (الحكيم والمنصوري , 1986 , ص ص 16-19) .

- 1- الخطية Linearity
- 2- الإضافية Additivity
- 3- قابلية الضرب (أو القسمة) (Multiplicatively (Divisibility)
- 4- أرقام حقيقية Real Numbers
- 5- عدم السلبية Non - Negativity

2-2-1 الخطية :

تعني الخطية بأن العلاقات بين المتغيرات سواء في دالة الهدف أو القيود يجب أن تكون خطية . والشكل الخطي لمتغيرات معينة هو تعبير رياضي يمكن بيانه كما يلي :

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

حيث أن a_i هي قيم ثابتة للمتغيرات x_i , وهذا يعني أن أجزاء التعابير لمسألة البرمجة الخطية لا تحتوي على :

- (أ) عملية ضرب أو قسمة بين المتغيرات .
- (ب) واحد أو أكثر من المتغيرات مرفوع لقوة معينة .
- (ج) لوغاريتم اعتيادي أو طبيعي لمتغير

2-2-2 الإضافية :-

تشير الإضافية الى انه اذا وجد اكثر من منتج (متغير) وتم صرف t_1 ساعة على ماكينة لإنتاج المنتج الاول x_1 , و t_2 ساعة على نفس الماكينة لإنتاج المنتج الثاني x_2 , فان مجموع الوقت T المصروف على الماكينة لإنتاج كلا من x_1 و x_2 هو :-

$$T=t_1+t_2$$

وهذه الخاصية تشمل كافة المقيدات الدالة على الموارد , وهي تعتبر مقبولة من الناحية الإنتاجية عند إهمال الزمن اللازم لتهيئة الماكينة لإنتاج منتج آخر

2-3- قابلية الضرب (او القسمة)

وهذه الفرضية تعني أمرين اثنين , احدهما يخص القيود والأخر يخص دالة الهدف وهما :-
 (1) ان الاحتياج من الموارد متناسبة طردياً وخطياً مع كمية الانتاج . وهذا يعني ان كمية الوحدات اللازمة من مورد ما لإنتاج x قطعة من المنتج تساوي حاصل ضرب x في كمية الوحدات اللازمة من ذلك المورد لإنتاج قطعة واحدة . وهذه الفرضية معقولة في النواحي الإنتاجية فيما إذا أهملنا التلف .
 (2) ان المدخل والمخارج للمتغيرات المبينة في دالة الهدف متناسبة طردياً بقيم ثابتة وهذه القيم الثابتة لا تتغير بتغير مستوى الانتاج . مثل هذه القيم يمكن ان تكون تكلفة الوحدة الواحدة في كل متغير أو الربحية في كل متغير . فإذا كانت تكلفة انتاج وحدة واحدة من منتج هي A , فان تكلفة انتاج X من الوحدات هي $X * A$.

2-4- النتائج بأرقام حقيقية :

ان قيم المتغيرات أو الاحتياج من الموارد لكل وحدة واحدة في هذه المتغيرات يمكن ان تكون أعداداً حقيقية تحوي على كسور عشرية . وفي حالات عديدة فان هذه الفرضية قد لا تكون عملية فمثلاً قد لا نستطيع القول ان حجم الانتاج المطلوب من المنتج هي 10.3 وحدة . أو إننا نحتاج الى 2.5 رجل لإنتاج وحدة واحدة وعلى اية حال فان أسلوب البرمجة الخطية تفيدنا في اتخاذ القرارات ولا نستبعد الاستفادة من الخبرة العملية في تعديل بعض نتائج الحل .

2-5- عدم السلبية :

تشير هذه الفرضية الى ان قيم كافة المتغيرات في مسألة لبرمجة الخطية يجب ان تكون غير سالبة أي موجبة . وهذه الفرضية ضرورية لكي تكون المسألة عملية وواقعية . فلا يمكن مثلاً الانتاج بكميات سالبة , ومن اجل ذلك فان كافة مسائل البرمجة الخطية تحوي على قيود تدل على عدم سلبية المتغيرات .

2-3 أنواع مسائل البرمجة الخطية :

وفقاً لدالة الهدف يمكن تقسيم مسائل البرمجة الخطية الى نوعين هما :-

- (1) مسألة تعظيم : وهي مسألة البرمجة الخطية التي تكون فيها دالة الهدف من نوع تعظيم العائد .
- (2) مسألة تقليل : وهي مسألة البرمجة الخطية التي تكون فيها دالة الهدف من نوع تقليل للتكاليف .

أما بالنسبة للقيود فيمكن تقسيم مسائل البرمجة الخطية الى ثلاثة أنواع (الحكيم والمنصوري ، 1986 ، ص 23-26) هي :-

1- الشكل القانوني Canonical Form :-

ويتصف هذا الشكل بان كافة القيود فيه هي من نوع اصغر او يساوي (\geq) عدا قيد عدم السلبية الذي هو من نوع اكبر من أو يساوي (\leq) , كما ان دالة الهدف هي تعظيم العائد .

2- الشكل الاعتيادي Ordinary Form :-

وهو الشكل الذي لا يشترط ان تكون القيود فيه من نوع اصغر او يساوي (\geq) كما لا تشترط ان تكون دالة الهدف فيه من نوع تعظيم . فقد يحتوي الشكل الاعتيادي على خليط مختلف من القيود (\geq, \leq, \approx) او نوع واحد عدا اصغر من او يساوي (\geq) الذي يمثل الشكل القانوني للمسألة .

3- الشكل القياسي standard Form :-

وتكون فيه كافة القيود على هيئة معادلات (تحوي إشارة التساوي =) كما ان دالة الهدف هي إما تعظيم او تقليل .

3- تطبيق نموذج البرمجة الخطية :

لغرض تطبيق نموذج البرمجة الخطية واختبار فرضية البحث سنفترض ان شركة للمعدات المنزلية تنتج ثلاجات وأجهزة تكييف الهواء . وان عملية التصنيع لكل من السلعتين يتطلب مرورها بمرحلتين إنتاجيتين . ويمكن في كل مرحلة من المرحلتين ان تخصص الشركة كل الوقت او بعضه في انتاج الثلاجات او أجهزة تكييف الهواء . وقد قدرت الطاقة الإنتاجية المتاحة في المرحلة الأولى 12000 ساعة وفي المرحلة الثانية 8000 ساعة . وقد بلغ الوقت اللازم لانتاج الثلاجة وجهاز تكييف الهواء في المرحلة الأولى 3 ساعة , 2 ساعة على الترتيب . اما في المرحلة الثانية فان الوقت اللازم لانتاج الثلاجة وجهاز تكييف الهواء بلغ 1 ساعة , 2 ساعة على الترتيب .

وقد بلغ عائد المساهمة للثلاجة الواحدة \$ 150 , في حين بلغ عائد المساهمة لجهاز تكييف الهواء الواحد مبلغ \$ 180 . اما أسعار البيع فهي \$ 320 , \$ 450 على الترتيب وقد وجدت الادارة من دراستها للسوق ان الحد الاقصى للطلب على الثلاجات هو 4000 ثلاجة , و ان الحد الاقصى للطلب على اجهزة تكييف الهواء هو 4500 جهاز . وقد كانت الكلفة المتغيرة \$ 170 , \$ 270 للثلاجة و لمكيف الهواء على الترتيب .
ولغرض مساعدة الادارة في تحديد الكمية الممكن إنتاجها من الثلاجات و اجهزة التكييف التي تحقق أقصى الأرباح باستخدام نموذج البرمجة الخطية سنتبع الآتي :

3-1- التعبير عن مستويات الإنتاج المطلوبة في صورة رموز جبرية و تحديد دالة الهدف :

سنفترض ان الكمية الممكن إنتاجها و بيعها من الثلاجات = x_1

ان الكمية الممكن إنتاجها و بيعها من اجهزة تكييف الهواء = x_2

وفي المشكلة التي بين أيدينا فان الهدف هو تحقيق أقصى الأرباح , إذن فان المشكلة هي مشكلة تعظيم (Maximum) . و اذا عرفنا ان عائد المساهمة هو سعر البيع ناقصا الكلفة المتغيرة , و حيث ان عائد المساهمة محدد في المشكلة قيد البحث , فإذا رمزنا لعائد المساهمة الكلي بالرمز (z) , فانه يمكن صياغة دالة الهدف بالشكل التالي :-

$$\text{عائد المساهمة للثلاجة الواحدة } = 150 - 320 = 170$$

$$\text{Max. } Z = 150x_1 + 180x_2 - 80 = 270 - 450 \text{ عائد المساهمة لجهاز تكييف الهواء}$$

3-2- صياغة القيود :

هناك أربعة قيود بالنسبة لهذه المشكلة وهي :-

- 1- قيد خاص بالطاقة الإنتاجية المتاحة في المرحلة الأولى .
 - 2- قيد خاص بالطاقة الإنتاجية المتاحة في المرحلة الثانية .
 - 3- قيد خاص بالطلب على الثلاجات .
 - 4- قيد خاص بالطلب على اجهزة تكييف الهواء .
- والآتي بيان لكل من هذه القيود

1- المرحلة الأولى :-

إن مجموع الساعات المنفقة على تصنيع الثلاجات + مجموع الساعات المنفقة على تصنيع اجهزة تكييف الهواء يجب ان تكون اقل من اوتساوي الطاقة الإنتاجية المتاحة في المرحلة الأولى . ويمكن تمثيل قيد المرحلة الأولى بالصيغة الرياضية الآتية :-

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12000$$

2- المرحلة الثانية :

لما كانت الثلاجة الواحدة تستغرق من وقت المرحلة الثانية ساعة واحدة , ويستغرق الجهاز الواحد لتكييف الهواء ساعتين . ولما كانت الطاقة الإنتاجية المتاحة للمرحلة الثانية 8000 ساعة , فانه ينبغي وبنفس المنطق الذي اتبعناه سابقاً يكون القيد الخاص بالمرحلة الثانية كما يلي :-

$$x_1 + 2x_2 \leq 8000$$

3- الطلب على الثلاجات :

بما ان دراسة السوق اثبتت ان الحد الاقصى للطلب على الثلاجات هو 4000 ثلاجة , فانه يمكن صياغة هذا القيد رياضياً كما يلي :-

$$x_1 \leq 4000$$

4- الطلب على اجهزة تكييف الهواء :

أوضحت دراسة السوق ان أقصى طلب على اجهزة تكييف الهواء للفترة المقبلة هو 4500 جهاز , فان على الشركة ان تلتزم بهذا القيد . بحيث يكون إنتاجها من اجهزة تكييف الهواء هو اقل من او يساوي 4500 جهاز . ويمكن صياغة هذا القيد رياضياً كمايلي :-

$$x_2 \leq 4500$$

3-3- الصيغة النهائية للمشكلة :

وتكتمل الصيغة النهائية للمشكلة بجمع دالة الهدف مع القيود , بالإضافة الى قيد عدم السالبية والذي يعبر عن ضرورة ابقاء قيم المتغيرات غير سالبة وكما موضح أدناه:-

$$\text{Max. } z = 150 x_1 + 180 x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &\leq 12000 \\ x_1+2x_2 &\leq 8000 \\ x_1 &\leq 4000 \\ x_2 &\leq 4500 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3-4 حل المشكلة بطريقة simplex :

انتهينا في الفقرة السابقة الى وضع الصيغة النهائية للمشكلة . ويلاحظ على الصيغة النهائية للمشكلة ان القيود وضعت بصيغة متباينات ولما كان التعامل مع المعادلات اكثر سهولة منه مع المتباينات , فان الخطوة الاولى في حل أية مشكلة بعد صياغتها رياضياً هي تحويل مجموعة من المتباينات في المشكلة الى معادلات .

3-4-1- تحويل المتباينات الى معادلات :-

يشير القيد الأول في الصيغة النهائية للمشكلة بأن علينا إنتاج كميات من X_1 , X_2 بحيث أن مجموع الوقت الذي يستغرقه إنتاج هذه الكميات في المرحلة الأولى يجب أن لا يتجاوز 12000 ساعة . فإذا تم إنتاج كميات من X_1 , X_2 تحتاج لوقت أقل من 12000 ساعة فإن المرحلة الأولى سيتوفر فيها وقت فائض غير مستغل نرسم له بالرمز (s_1) , ان قيمة s_1 تتراوح بين الصفر اذا تم استغلال كل الوقت المتاح في المرحلة الأولى وبين 12000 اذا لم تستخدم المرحلة الأولى في الإنتاج , وعليه فان $(s_1 \geq 0)$. وهكذا فان تحويل القيد الاول في المشكلة قيد البحث من متباينة الى معادلة فانه يستلزم إضافة الوقت الفائض الى الأوقات المستخدمة في الإنتاج وبحيث يكون القيد الاول كما يلي :-

$$3X_1+2X_2+S_1=12000$$

وبنفس الطريقة يمكن إضافة الوقت الفائض للمرحلة الثانية (S_2) والكمية الفائضة من الطلب على المنتج X_1 في حالة عدم إنتاجه بالكامل (S_3) والكمية الفائضة من الطلب على المنتج X_2 في حالة عدم إنتاجه بالكامل (S_4) وكما يلي :-

$$\begin{aligned} X_1+0X_2+S_3 &= 4000 \\ 0X_1+X_2+S_4 &= 4500 \end{aligned}$$

$$X_1+2X_2+S_2=8000$$

وتسمى المتغيرات (S_1, S_2, S_3, S_4) بالمتغيرات الفائضة . وحيث أن المشكلة هي تعظيم العائد من الإنتاج ، لذا فإن علينا قدر الأمكان استغلال كل الوقت المتاح والعمل على تقليل الوقت الفائض . وبالتالي فإن هدفنا الأساسي هو أن يكون العائد من المتغيرات الفائضة (S_1, S_2, S_3, S_4) في دالة الهدف مساوياً للصفر ، ولهذا فإن معاملات المتغيرات الفائضة في دالة الهدف ستحمل قيمة صفر (-0) وعند نقل القيم في دالة الهدف من الطرف الأيمن الى الطرف الأيسر ستتغير أشارات معاملات دالة الهدف . وهكذا فإن الصيغة المعدلة للمشكلة ستكون كما يلي :

$$\text{Max } Z - 150 X_1 - 180 X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 = 0$$

Subject to :

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 &= 12000 \\ X_1 + 2X_2 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 + 0S_4 &= 8000 \\ X_1 + 0X_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0S_4 &= 4000 \\ 0X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + S_4 &= 4500 \end{aligned}$$

3-4-2- وضع الجدول الأولي :

يمكن وضع الصيغة المعدلة للمشكلة (المبينة في الفقرة السابقة) في جدول الحل الأولي وكما مبين أدناه :

جدول (1)

Basic	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	الحل
Z	1	-150	-180	0	0	0	0	0
S1	0	3	2	1	0	0	0	12000
S2	0	1	2	0	1	0	0	8000
S3	0	1	0	0	0	1	0	4000
S4	0	0	1	0	0	0	1	4500

مصفوفة التعريف

يسمى الجدول أعلاه بالجدول الأولي للحل لأنه يحتوي على الحل المبدئي للمسألة ، وتسمى المتغيرات x_1 , x_2 بالمتغيرات الأساسية ، أما المتغيرات (S_1, S_2, S_3, S_4) فهي المتغيرات الفائضة . وتسمى المصفوفة التي عناصرها هي عوامل المتغيرات المضافة بمصفوفة التعريف ، ولهذه المصفوفة أهمية في تحليل الحساسية للحل تجاه التغيرات في عوامل القيود ودالة الهدف .

3-4-3- الخطوات اللاحقة للحل :

بعد وضع الجدول الأولي للحل نقوم بالخطوات الآتية :-

1- نختار المتغير الداخل :- ننظر الى صف دالة الهدف (Z) ونختار اكبر رقم سالب فنجده عند $X_2 = -180$ فيعتبر X_2 هو المتغير الداخل . ان سبب ظهور معاملات دالة الهدف بإشارات سالبة في الجدول الأولي للحل هو لأننا نقلنا هذه المعاملات من الطرف الأيمن لدالة الهدف الى طرفها الأيسر ولذلك تغيرت إشارتها فأصبحت سالبة . اما لماذا تم اختيار اكبر رقم في دالة الهدف ؟ فهو لان المشكلة هي مشكلة تعظيم الارباح , وحيث ان معاملات دالة الهدف تمثل عائد المساهمة للمنتجات , فحتى يتم تعظيم الارباح يجب اختيار المنتج الذي يحقق اكبر عائد مساهمة .

2- نقسم عناصر عمود الحل على عناصر العمود X_2 (المتغير الداخل) ونختار اصغر ناتج قسمة ليمثل المتغير الخارج بعد استبعاد القيم السالبة والصفر وكما مبين أدناه :-

$$S_1 = 12000/2=6000 \quad S_3=4000/0=&$$

$$S_2= 8000/2=4000 \quad S_4=4500/1=4500$$

إذن المتغير الخارج هو S_2 لأنه يمثل اصغر ناتج قسمة .

3- تشكل الجدول الثاني للحل وكما يلي :-

أ- ندخل X_2 بدلاً من S_2 ونحسب قيمتها : بان نقسم عناصر صف S_2 في الجدول رقم (1) على العنصر المحوري (رقم 2) الذي يمثل نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل (X_2) مع صف المتغير الخارج (S_2) وناتج القسمة سيمثل صف X_2 في الجدول الجديد رقم (2) ويسمى هذا الصف بـ (صف المحور) وسيظهر صف المحور في الجدول الجديد رقم (2) كما يلي :-

Basic	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	الحل
X1	0	1/2	1	0	1/2	0	0	4000

ب- التغيرات في الصفوف الأخرى :- ان العناصر الجديدة للصفوف في الجدول رقم (2) باستثناء صف المحور يمكن حسابها وفقاً للمعادلة الآتية :-

عنصر الصف الجديد = عنصر الصف القديم - (عنصر التقاطع في الصف القديم) * (العنصر المقابل له في صف المحور المستبدل)
ونقصد بعنصر التقاطع في الصف القديم هو العنصر الموجود في عمود المحور (عمود X_2 في الجدول رقم 1) - وهو عمود المتغير الداخل) . وهكذا فان عنصر التقاطع للصف Z هو (-180) , وعنصر التقاطع للصف S_1 هو (2) , وعنصر التقاطع للصف S_3 هو (0) , وعنصر التقاطع للصف S_4 هو (1) .

وهكذا فان حسابات العناصر للصف الاول (Z) بعد إجراء عملية التبادل سيكون كالاتي :-
عناصر الصف الجديد لـ (Z) = عناصر الصف القديم لـ (Z) - [(عنصر التقاطع في الصف القديم) * (عناصر صف المحور المستبدل)]

$$Z=(1;-150;-180;0;0;0;0;0;-) - [-180(0;1/2;1;0;1/2;0;0;4000)]$$

$$Z= 1;-60;0;0;90;0;0;720000$$

اما حسابات العناصر للصف الثاني (S_1) بعد إجراء عملية التبادل وتطبيق المعادلة أعلاه ستكون كما يلي :-

$$S_2 = (0; 3; 2; 1; 0; 0; 0; 12000) - [2 (0; 1/2; 1; 0; 1/2; 0; 0; 4000)]$$

$$S_1 = 0; 2; 0; 1; 1; 0; 0; 4000$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب عناصر الصف الرابع الجديد (S_3) بعد إجراء عملية التبادل وتطبيق المعادلة أعلاه وستكون كما يلي:-

$$S_3 = (0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 4000) [0(0; 1/2; 1; 0; 1/2; 0; 0; 4000)]$$

$$S_3 = 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 4000$$

وبنفس الأسلوب يمكن حساب عناصر الصف الأخير الجديد (S_4) بعد إجراء عملية التبادل وستكون كمايلي :-

$$S_4 = (0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 4500) - [1(0; 1/2; 1; 0; 1/2; 0; 0; 4000)]$$

$$S_4 = 0; -1/2; 0; 0; -1/2; 0; 1; 500$$

وهكذا فان جدول الحل (2) سيكون كالآتي

جدول (2)

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الحل
Z	1	-60	0	0	90	0	0	720000
S1	0	2	0	1	-1	0	0	4000
X2	0	1/2	1	0	1/2	0	0	4000
S3	0	1	0	0	0	1	0	4000
S4	0	-1/2	0	0	-1/2	0	1	500

وبما ان صف دالة الهدف (Z) في الجدول أعلاه فيه قيم سالبة فهذا يعني إننا لم نصل الى الحل الأمثل .
وبنفس الطريقة سنتبع الخطوات اللاحقة للحل عند تكوين جدول (2) حيث إننا سنختار المتغير الداخل من خلال النظر الى صف دالة الهدف (Z) ونختار اكبر رقم سالب والذي هو عند $X_1 = -60$ وهذا يعني ان المتغير X_1 هو المتغير الداخل و عند قسمة عناصر عمود الحل على عناصر عمود المتغير الداخل (X_1) واختيار اصغر ناتج قسمة ليمثل المتغير الخارج بعد استبعاد القيم السالبة والصفر , يتضح ان المتغير الخارج هو S_1 لأنه يمثل اصغر ناتج قسمة .
ثم نقوم بتشكيل الجدول الثالث للحل من خلال إتباع المعادلة الآتية :-

عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم - [(عناصر التقاطع في الصف القديم) * (عناصر صف المحور المستبدل)]

حيث سيتم إدخال المتغير الداخل (X_1) بدلا من المتغير الخارج (S_1) ونحسب قيمته من خلال قسمة عناصر صف S_1 في جدول (2) على العنصر المحوري (2) الذي يمثل نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج . وناتج القسمة سيتمثل صف X_1 في الجدول الجديد (3) ويسمى هذا الصف بـ(صف المحور).
وسيتظهر صف المحور في الجدول الجديد (3) كما يلي :-

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الحل
X1	0	1	0	1/2	-1/2	0	0	2000

ثم نقوم باستخراج عناصر صفوف الجدول الجديد (3) بتطبيق المعادلة السابقة وبنفس الأسلوب الذي اتبع في تشكيل الجدول السابق (2) وهكذا إذا س يظهر الجدول الجديد (3) كما يلي :-

جدول (3) [جدول الحل الأمثل]

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الحل
Z	1	0	0	30	60	0	0	840000
X1	0	1	0	1/2	-1/2	0	0	2000
X2	0	0	1	-1/4	3/4	0	0	3000
S3	0	0	0	-1/2	1/2	1	0	2000
S4	0	0	0	1/4	-3/4	0	1	1500

وحيث ان قيم عناصر دالة الهدف (Z) في الجدول أعلاه هي قيم موجبة فهذا يعني إننا وصلنا الى الحل الأمثل .

4- التفسير الاقتصادي للحل الأمثل وتحليل الحساسية

من جدول الحل الأمثل (جدول 3) نستطيع ان نقرأ الحل على النحو الآتي :-

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{عدد الثلجات التي ستنتج} = 2000 \text{ ثلاجة} \\ X_2 &= \text{عدد مكيفات الهواء التي ستنتج} = 3000 \text{ مكيف هواء} \\ S_1 &= \text{صفر} \\ S_2 &= \text{صفر} \\ S_3 &= 2000 \\ S_4 &= 1500 \\ Z &= \text{عائد المساهمة الكلي} = \$840000 \end{aligned}$$

4-1 تحليل الطاقات العاطلة :-

لو أعدنا النظر الى المتغيرات الواردة في المشكلة لوجدنا اننا عرفنا المتغيرات X_1, X_2 لتشير الى عدد الثلجات وعدد مكيفات الهواء على التوالي. اما المتغيرات

S_1, S_2, S_3, S_4 فلقد ذكر بأنه بهدف تحويل المتباينات الى معادلات ثم إضافة هذه المتغيرات وسميت متغيرات فائضة كما انه بالامكان تسميتها (متغيرات القصور) من حيث إنها تقيس مدى قصور الطرف الأيسر عن بلوغ الطرف الأيمن. فإذا كان S_1 يقيس مدى قصور الطرف الأيسر عن بلوغ الطرف الأيمن في القيد الاول. فما هو ذلك الطرف الأيسر؟ وما هو ذلك الطرف الأيمن؟ لو تم التمعن في الطرف الأيسر للقيد الاول في المشكلة الأصلية لأمكن ملاحظة انه يعبر عن مجموع الطاقة المستغلة في المرحلة الأولى، اما الطرف الأيمن لذات القيد فهو يعبر عن مقدار الطاقة المتاحة في المرحلة الأولى، وبذلك يكون الفرق بين الطرفين هو مقدار الطاقة غير المستغلة (العاطلة) في المرحلة الأولى. ولما كان S_1 يقيس مقدار الفرق بين طرفي القيد الأصلي فإنه يعتبر مقياساً للطاقة غير المستغلة (العاطلة).

∴ $S_1 =$ الطاقة العاطلة في المرحلة الأولى = صفر

و بذات المنطق فان S_2 يقيس مقدار الطاقة العاطلة في المرحلة الثانية ولما كان

S_1, S_2 تساوي صفر (في الحل الأمثل) فان معنى ذلك انه لا توجد طاقة عاطلة في المرحلة الأولى والثانية.

اما S_3 فإنه يقيس مدى قصور الطرف الأيسر عن بلوغ الطرف الأيمن للقيد الثالث في المشكلة الأصلية والتي تمثل قيد الطلب على الثلجات. ولما كان عدد الثلجات التي ستنتج في الحل الأمثل هو 2000 ثلاجة، في حين كان الطلب المتوقع على الثلجات هو 4000 ثلاجة. فمن الطبيعي ان تظهر قيمة S_3 في الحل الأمثل بمقدار 2000 ثلاجة والتي هي تمثل الفرق بين ما سينتج فعلاً من الثلجات وفق الحل الأمثل وبين الطلب المتوقع على الثلجات.

اي ان $S_3 =$ الطلب المتوقع على الثلجات (4000) - الوحدات المنتجة وفق الحل الأمثل (2000) = 2000 ثلاجة.

وبنفس الاسلوب فان S_4 تقيس مدى قصور الوحدات المنتجة من مكيفات الهواء وفق الحل الأمثل عن حجم الطلب المتوقع عليها. و حيث ان الطلب المتوقع على مكيفات الهواء كما ظهر في المشكلة الأصلية هو 4.500 وحدة، و ان الوحدات المنتجة من مكيفات الهواء وفق الحل الأمثل هو 3000 وحدة، فان قيمة S_4 هي :-

$$S_4 = 3000 - 4500 = -1500 \text{ مكيف هواء وهي قيمة } S_4 \text{ الظاهرة في الحل الأمثل.}$$

4-2- أسعار الظل :

لو رجعنا الى جدول الحل الأمثل ونظرنا الى صف دالة الهدف (Z) تحت أعمدة المتغيرات المضافة (S_4, S_3, S_2, S_1) فإننا سنجد أربعة أرقام هي على الترتيب (0,0,60,30). ولما كان لدينا أربعة قيود في المشكلة قيد البحث، فان علينا ان نقبل بان كل رقم من هذه الأرقام يقابل قيوداً من هذه القيود وعلى الترتيب، بحيث ان القيمة 30 تقابل القيد الاول، والقيمة 60 تقابل القيد الثاني، والقيمة -0- تقابل القيد الثالث، والقيمة -0- تقابل القيد الرابع، وذلك في ترتيب محكم. وتسمى هذه الأرقام او القيم بمسلمات مختلفة منها :-

1- أسعار الظل Shadow price

2- القيم المقابلة Dual price

3- تكلفة الفرصة البديلة Opportunity cost

ولتسهيل الإشارة الى هذه القيم المسماة بأسعار الظل سترمز الى أسعار الظل بالرمز Y وهكذا فان أسعار الظل هي :-

$$Y_1 = 30 \quad Y_2 = 60 \quad Y_3 = 0 \quad Y_4 = 0$$

ولان أسعار الظل هذه جاء حصولنا عليها عرضاً من حيث اننا لم نكن نسعى إليها أصلاً لان الهدف المعلن هو تحديد برنامج الانتاج الأمثل، اي تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل واحد من المنتجات والتي يترتب عليها تحقيق أقصى عائد من الارباح ولهذا فإنه يقال ان أسعار الظل جاءت كمنتج ثانوي (عرضي) لعملية تحديد برنامج الانتاج.

4-3- خواص أسعار الظل :

يمكن استعراض بعض خواص أسعار الظل وكما يلي:-

4-3-1- الخاصية التجميعية :-

نحن نعلم بان الأطراف اليمنى للقيود الأربعة الواردة في المشكلة قيد البحث هي 12000 ساعة, 8000 ساعة, 4000 ساعة, 4500 مكيف هواء . وان أسعار الظل (Y_4, Y_3, Y_2, Y_1) هي في المقابل $(0, 0, 60, 30)$ فماذا يحدث لو قمنا بضرب كل من هذه الأطراف اليمنى في سعر الظل المقابل له ثم إضافة حوا صل الضرب ؟

$$(12000*30)+(8000*60)+(4000*0)+(4500*0)=840000$$

ان هذا المجموع يساوي تماماً القيمة المثلى لدالة الهدف في جدول الحل الامثل وهي تمثل عائد المساهمة الكلي .

4-3-2- الخاصية التحليلية :

إذا كان حاصل الضرب والإضافة في الخاصية الأولى قد أديا الى الوصول الى القيمة المثلى لدالة الهدف , فان حواصل الضرب فقط دون الإضافة تؤدي دوراً تحليلياً من حيث انها تجزيء دالة الهدف بين عناصر الانتاج النادرة الأربعة بحيث يمكن القول ان :-

360000 = 30*12000 =	مساهمة العنصر الاول في القيمة المثلى لدالة الهدف
480000 = 60*8000=	مساهمة العنصر الثاني في القيمة المثلى لدالة الهدف
-0- = 0*4000=	مساهمة العنصر الثالث في القيمة المثلى لدالة الهدف
-0- = 0*4500=	مساهمة العنصر الرابع في القيمة المثلى لدالة الهدف
\$840000	مجموع القيمة المثلى لدالة الهدف

4-3-3- الخاصية التجنيسية :-

في المشكلة قيد البحث نجد ان هناك أربعة من أسعار الظل وهي :- $(0, 0, 60, 30)$. ولكن ما هو التمييز الذي يمكن ان يصاحب هذه الأرقام ؟ هل هي دنائير , أم ساعات , أم كيلو غرامات , أم أمتار , ... ؟ والإجابة هي ان التمييز او الصفة التي يمكن ان تطلق على هذه القيم هي من نفس جنس التمييز او الصفة التي تطلق على دالة الهدف . فإذا كانت معاملات دالة الهدف في مشكلة ما مقاسة بالدنانير فان الصفة المصاحبة لأسعار الظل ستكون دينار . وإذا كانت معاملات دالة الهدف في مشكلة أخرى مقاسة بالكيلو غرامات فان الصفة الغالبة التي تصاحب أسعار الظل تكون كيلو غراماً . اما اذا كانت معاملات دالة الهدف مقاسة بالساعات فان الصفة الغالبة التي تصاحب أسعار الظل تكون ساعة .. وهكذا . كل هذا بصرف النظر عن طبيعة القيود ووحدة القياس السائدة فيها . فقد يحدث في المشكلة الواحدة ان تكون فيها قيود متنوعة بعضها تقاس وحداته بالدولارات وبعضها بالدنانير وبعضها بالأطنان وأخرى بالكيلو غرامات وغيرها . فإذا كانت دالة الهدف يعبر عنها مثلاً بوحدة فائض المساهمة (اي دولار في المشكلة قيد البحث) فان سعر الظل المقابل لكل واحد من القيود السابقة سوف يكون له تمييز واحد فقط هو (دولار) رغم اختلاف وحدات القياس من قيد لآخر . وعليه فان الوصف الكامل لأسعار الظل في المشكلة المبحوثة هي :-

$$Y_1=\$30 \quad Y_2=\$60 \quad Y_3=\$-0- \quad Y_4=\$-0-$$

4-3-4- التقويم الاقتصادي لأوجه النشاط :-

في المشكلة قيد البحث لدينا أربعة قيود وهي : الساعات المتاحة في المرحلة الاولى , والساعات المتاحة في المرحلة الثانية , وحجم الطلب المتوقع على التلجيات , وحجم الطلب المتوقع على مكيفات الهواء . واما أسعار الظل لكل واحدة من هذه العناصر فهي $\$30, \$60, \$-0-, \$-0-$ على التوالي . فما هي الجوانب الاقتصادية لمعلومة من هذا النوع ؟

يمثل سعر الظل القيمة الاقتصادية للوحدة الواحدة من كل من هذه العناصر . وهذه القيمة ليست قيمة سوقية تحددت بفعل قوى السوق وإنما بفعل قوى محتسبة تحدد مدى مساهمة الوحدة الواحدة من عناصر الانتاج الثابتة في تحقيق عائد المساهمة (ومن ثم مدى المساهمة الإجمالية لكل عنصر من هذه العناصر في تحقق الفائض). وينظر الى سعر الظل غيضاً على انه تكلفة الفرص البديلة لعنصر ما . ولذلك فانه في حالة نفاذ الطاقة المتاحة من احد العناصر فان سعر الظل يكون اكبر من او يساوي صفر . اما اذا لم تستنفد الطاقة المتاحة من هذا العنصر بالكامل فان سعر الظل لهذا العنصر لا بد وان يساوي بالضرورة صفر حيث تكون هذه هي قيمته الاقتصادية كسلعة متاحة داخلياً بوفرة . ففي المشكلة المبحوثة لم تكن هناك طاقة عاطلة في المرحلة الاولى والثانية ولذلك كان سعر الظل موجباً ($\$30$) في المرحلة الاولى , $\$60$ في المرحلة الثانية) . وقد اظهر الحل الامثل ان هناك قصور في بلوغ حجم الطلب المتوقع على التلجيات ومكيفات الهواء بمقدار 2000 ثلاجة و1500 مكيف هواء ولهذا كان سعر الظل (اي كلفة الفرصة البديلة) يساوي صفر لكل منهما . وفي حالة وجود طاقة عاطلة في احد المراحل الانتاجية فان زيادة الطاقة المتاحة فيها لن يكون من ورائها أية فائدة , وهذا ما يعني ان سعر الظل يساوي الصفر , اي ان القيمة الاقتصادية لهذه الزيادة تساوي صفر . اما في حالة نفاذ الطاقة المتاحة في احد المراحل كالمرحلة الاولى مثلاً , فان زيادة الطاقة المتاحة فيها بمقدار ساعة واحدة سوف تؤدي الى زيادة عائد المساهمة الكلي بمقدار $\$30$ (قيمة سعر الظل المقابل لقيد المرحلة الاولى) .

وفي المرحلة الثانية الذي نفذت طاقته بالكامل كان سعر الظل موجياً ويساوي \$60 ، وهذه هي القيمة الاقتصادية للساعة الواحدة في المرحلة الثانية حيث ان زيادة الطاقة المتاحة في هذه المرحلة بمقدار ساعة واحدة □ سوف يترتب عليها زيادة عائد المساهمة الكلي بمقدار \$60 ، ويمكن التحقق من ذلك كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ S3 \\ S4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12000 \\ 8001 \\ 4000 \\ 4500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999.5 \\ 3000.75 \\ 2000.5 \\ 1499.25 \end{bmatrix}$$

$$Z = [150 \ 180 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1999.5 \\ 3000.75 \\ 2000.5 \\ 1499.25 \end{bmatrix} = \$840060$$

نلاحظ من الاحتساب أعلاه ان زيادة عدد الساعات المتاحة في المرحلة الثانية من 8000 ساعة الى 8001 ساعة قد أدى الى زيادة عائد المساهمة الكلي من \$ 840000 الى \$ 840060 . ان هذه الزيادة في عائد المساهمة الكلي بمقدار \$60 تمثل سعر الظل للساعة التي أضيفت الى المرحلة الثانية فإذا كان هذا هو احد المعاني والآثار المباشرة لأسعار الظل فما الذي يمكن ان نستفاد من معلومة كهذه ؟ لما كان سعر الظل للساعة الواحدة في المرحلة الثانية هو \$ 60 فإنه يكون في صالح الشركة إضافة هذه الساعة الى الطاقة المتاحة طالما كان تكلفة الحصول عليها اقل من \$ 60 لان المحصلة النهائية سوف تكون ايجابية في هذه الحالة . و بالمثل فإنه اذا كانت الشركة تتكلف اقل من \$ 30 من جراء زيادة طاقة المرحلة الاولى بساعة واحدة فإننا ننصح الشركة بإجراء هذه الزيادة في الطاقة المتاحة لان الزيادة في عائد المساهمة الكلي سوف تغطي هذه التكلفة و تحقق فائضا صافيا أيضا . وكما كان سعر الظل المقابل لأحد القيود مرتفعا كلما كان ذلك دلالة على ان هذا المورد يمثل نقطة اختناق بالنسبة للشركة . اي ان ارتفاع سعر الظل لأحد القيود لا يعبر عن ظاهرة صحيحة لأنه يعبر في الغالب عن عدم توازن الطاقات ، بحيث ان هذه القيمة الاقتصادية لأحد الموارد ممثلة في سعر الظل المقابل لاتعبر في الواقع عن إنتاجية هذا العنصر في حد ذاته بقدر ما هي تعبير عن تكاتف أنواع الطاقات المختلفة في العملية الإنتاجية . ففي العادة عندما ينفرد عنصر من عناصر الانتاج بسعر ظل مرتفع كثيراً عن غيره من أسعار الظل للموارد الأخرى فان هذا يعني ان هذا العنصر موضع ندرة ويمثل نقطة اختناق كبيرة بالنسبة للشركة ، وان زيادة القدر المتاح منه وتوجيهها الى العمل سوف تساعد أيضا على تقليل الطاقات العاطلة في مواضع أخرى بالشركة لتعمل متكاملة مع بعضها .

تبقى لنا من زوايا التقويم الاقتصادي زاوية مهمة تبرز بوضوح عمق تداخل المنطق الاقتصادي في بناء أساسيات نموذج البرمجة الخطية والنتائج المترتبة على ذلك . وتتعلق هذه الزاوية بما يشتهر في علم الاقتصاد باسم " قاعدة توازن المنتج " . ويتحقق هذا التوازن عندما تدفع العملية الإنتاجية الى ذلك المستوى الذي تتعادل عنده " التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي " الامر الذي يعني بلوغ مستوى الانتاج الامثل والذي يترتب على بلوغه تحقيق اقصى فائض ممكن للمنتج . فهل يتفق مستوى الانتاج الامثل الذي رشحه اسلوب البرمجة الخطية مع ذلك المستوى الذي تفرضه قاعدة توازن المنتج ؟ للإجابة على هذا السؤال علينا ان نرى ما اذا كان حقيقياً تعادل التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي عند مستوى الانتاج الامثل الذي تم تحديده من خلال نموذج البرمجة الخطية .

والإيراد الحدي هو ثمن بيع الوحدة الواحدة من المنتج . اما التكلفة الحدية فهي (في المفهوم الاقتصادي) التكلفة المتغيرة مضافاً إليها تكلفة الفرصة البديلة (التكلفة المحسوبة) لعناصر الانتاج ذات الندرة والتي يوفر سعر الظل مقياساً ملائماً لها في هذه الحالة ، وتحسب هذه الأخيرة بضرب سعر الظل لكل نوع من أنواع الطاقات في مقدار ما تستهلكه الوحدة الواحدة من المنتج من هذا النوع من الطاقة . ويوضح الجدول التالي عرضاً تفصيلياً مقارناً لكل من التكلفة الحدية والإيراد الحدي لكل منتج .

المستوى التوازني الذي يتعادل عنده الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية

البيان	الثلاجات	مكيفات الهواء
الإيراد الحدي	\$ 320	\$450
التكلفة الاقتصادية:		
التكلفة المتغيرة	170	270
تكلفة الفرصة البديلة لعناصر الانتاج النادرة:		
القيود الأول	90 = 30*3	60 = 30*3
القيود الثاني	60 = 60*1	120 = 60*2
القيود الثالث	0 = 0*1	0 = 0*0
القيود الرابع	0 = 0*0	0 = 0*1
	\$320	\$450

نلاحظ في هذا الجدول ان التكلفة الاقتصادية لإنتاج كلا من الثلجات ومكيفات الهواء تتعادل مع العائد من أنتاجهما وبيعهما , ولذا رشحت لتكون ضمن برنامج الإنتاج الأمثل.

5- الاستنتاجات والتوصيات

1-5 الاستنتاجات

1. اظهر الحل الامثل ان الخطة الإنتاجية المثلى للفترة المقبلة ستكون 2000 ثلاجة و 3000 مكيف هواء.
2. اظهر البحث ان عائد المساهمة الكلي سيكون \$ 840000 و الذي سيتحقق عند تنفيذ خطة الإنتاج التي تم التوصل اليها في جدول الحل الامثل .
3. أتضح من الحل الامثل انه لا توجد طاقة عاطلة في المرحلة الاولى و الثانية حيث تم استغلال الطاقة المتاحة فيهما بالكامل , فقد ظهرت قيمة S_1, S_2 تساوي صفر .
4. تبين من الحل الامثل ان الخطة الإنتاجية لم تلبى حجم الطلب المتوقع على المنتجات حيث بلغ العجز في عدد الثلجات التي تنتج فعلا عن بلوغ الطلب المتوقع لها 2000 ثلاجة , و ان العجز في عدد مكيفات الهواء التي تنتج فعلا عن بلوغ الطلب المتوقع لها 1500 مكيف هواء
5. اظهر جدول الحل الامثل ان سعر الظل (و هو يمثل كلفة الفرصة البديلة) للساعة الواحدة في المرحلة الاولى يساوي \$30 , و ان سعر الظل للساعة الواحدة في المرحلة الثانية يساوي \$ 60 و ان سعر الظل للوحدة الواحدة من الطلب المتوقع على الثلجات و مكيفات الهواء يساوي -0- \$ و هذا يعني ان مساهمة الساعة الواحدة من المرحلة الاولى في عائد المساهمة الكلي يساوي \$ 30 , و ان مساهمة الساعة الواحدة من المرحلة الثانية في عائد المساهمة الكلي يساوي \$ 60 , و ان مساهمة الوحدة الواحدة من الطلب المتوقع على المنتجات (الثلجات و مكيفات الهواء) تساوي صفر .
6. إتضح من اسعار الظل ان الساعات المتاحة للمرحلة الثانية و الاولى هي موضع ندرة و تمثل نقطة اختناق كبيرة بالنسبة للشركة و خصوصا المرحلة الثانية حيث بلغ سعر الظل للساعة الواحدة في المرحلة الاولى \$ 30 و في المرحلة الثانية \$ 60 . و ان زيادة الساعات المتاحة للمرحلة الاولى و الثانية ستؤدي الى بلوغ حجم الطلب المتوقع على المنتجات او تقليل حجم القصور في بلوغ حجم المتوقع على تلك المنتجات .
7. اظهر التقويم الاقتصادي لأوجه نشاط الشركة ان هذه الشركة قيد الدراسة ستصل الى نقطة التوازن اذا نفذت خطة الإنتاج الظاهرة في جدول الحل الامثل . ان نقطة التوازن هذه تمثل أفضل مستوى يمكن للشركة بلوغه و الذي تتعادل فيه التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي و الذي عنده ستحقق الشركة أقصى عائد من الارباح .

2-5 التوصيات :

1. يوصي البحث بضرورة استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد خطة الإنتاج المثلى لأن ذلك سيوفر معلومات ملائمة تساعد الادارة على اتخاذ القرارات الصائبة .
2. يوصي البحث بزيادة الطاقة المتاحة في المرحلة الاولى و الثانية بشرط ان تكون الزيادة في الطاقة المتاحة تكلف الشركة اقل من \$ 30 للساعة الواحدة في المرحلة الاولى , و اقل من \$ 60 للساعة الواحدة في المرحلة الثانية . ان إجراء هذه الزيادة ستحقق منافع للشركة حيث انها ستغطي تكلفة الزيادة في الطاقة المتاحة و تحقق فائضا صافيا ايضا .

ثبت المراجع

1. أبو رمان , محمد عبد العزيز , البرمجة الخطية , ط 1 , 1989 .
2. الحكيم , لطيف عبد رجب , المنصوري , عبد الجليل آدم , مدخل الى البرمجة الخطية , ط 1 (دمشق , مطبعة الشام , 1986)
3. الشكرجي , نعمة , مدخل في وظائف المنشأة , ط 1 (بغداد , مطبعة عصام , 1976)
4. مشرفي , حسن علي , القاضي , زياد عبد الكريم , بحوث العمليات تحليل كمي في الادارة , ط 1 (عمان , دار المسيرة , 1997)
5. نور احمد , المحاسبة الادارية و بحوث العمليات , (الاسكندرية , مؤسسة شباب الجامعة , 1989)
6. Garrison , Ray H., managerial Accounting , 5th ed. (Home wood , Illinois , 1988) .
7. Hadley , G. linear programming . London: Oxford and ; IBH publishing CO ., 1962 .
8. Horngren , et.al. cost Accounting managerial Emphasis, 9th ed . prentice hall International Inc .1997 .