

متعددات حدود هوسويا- w لاتصال بعض البيانات الخاصة

هافين جلال أحمد

كلية العلوم

جامعة دهوك

أسماء صلاح عزيز

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل

أحمد محمد علي

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٢/٠٦/٢٨

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٢/٠٦/٢١

ABSTRACT

Let u and v be any two distinct vertices in a connected graph G . A container $C(u, v)$ is a set of internally disjoint $u - v$ paths. The width of $C(u, v)$ is denoted by w or $w(C(u, v))$ is $|C(u, v)|$, and the length of $\ell(C(u, v))$ is the length of the longest $u - v$ path in $C(u, v)$. Then, for a given positive integer w , the width distance between any two distinct vertices u and v in a connected graph G is define by: $d_w(u, v) = \min_{C(u, v)} \ell(C(u, v))$, where the minimum is taken over all containers $C(u, v)$ of width w .

In this paper, we find the Hosoya polynomials, and Wiener indices of the join of two special graphs such as bipartite complete graphs, paths, cycles, star graphs and wheel graphs with respect to the width distance.

المخلص

تعرف الحاوية بين أي رأسين مختلفين u و v في بيان متصل G على أنها مجموعة من الدروب $u - v$ المنفصلة داخليا، ويرمز لها بـ $C(u, v)$. ويعرف عرض (width) الحاوية $C(u, v)$ على أنه عدد الدروب $u - v$ فيها ويرمز لها w أو $w(C(u, v))$ ، كما يعرف طول الحاوية $C(u, v)$ على أنه الطول لأطول درب $u - v$ في الحاوية ويعبر عنه بالرمز $\ell(C(u, v))$. تعرف المسافة العرضية- w بين الرأسين u و v في G لكل عدد صحيح موجب w ومعين على أنها $d_w(u, v) = \min_{C(u, v)} \ell(C(u, v))$ حيث أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات $C(u, v)$ للمسافة العرضية- w .

في هذا البحث تم إيجاد متعددات حدود هوسويا للمسافة العرضية- w . لاتصال بيانات خاصة مثل الثنائية التجزئة التامة، والدرب، والدارة، والنجمة، والعجلة. كما تم إيجاد دليل وينر بالنسبة لهذه المسافة لكل من البيانات المذكورة.

1. المقدمة:

ليكن u و v أي رأسين مختلفين في بيان متصل G ، تعرف الحاوية (container) بين u و v على أنها مجموعة من الدروب $u - v$ المنفصلة داخليا، ويرمز لها بـ $C(u, v)$. ويعرف عرض (width) الحاوية $C(u, v)$ على أنه عدد الدروب $u - v$ فيها، أي أن:

$$w = w(C(u, v)) = |C(u, v)|$$

كما يعرف طول الحاوية $C(u, v)$ على أنه الطول لأطول درب $u - v$ فيها ويرمز له بالرمز $\ell(C(u, v))$.

تعريف: المسافة العرضية- w (w -width distance): لكل عدد صحيح موجب ومعين w ، $w \geq 2$ ، تعرف

المسافة العرضية- w بين الرأسين المختلفين u و v في بيان متصل G على أنها

$$d_w(u, v) = \min_{C(u, v)} \ell(C(u, v))$$

إذ أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات $C(u, v)$ ذات العرض w . [2, 3]

نلاحظ أنه عندما يكون $w = 1$ فإن المسافة العرضية- w تصبح المسافة الاعتيادية بين الرأسين u

و v ، لذلك سوف نفرض أن $w \geq 2$ ، وعندها يكون $d_w(u, v) \geq 2$ لأي رأسين مختلفين في G ، كما نلاحظ

أيضا أن w لا يزيد على عامل الاتصال k_0 لرؤوس البيان G ، أي أن $2 \leq w \leq k_0$.

لتعريف القطر ونصف القطر للبيان المتصل G بالنسبة للمسافة العرضية- w ، سوف نعرف أولا الاختلاف

المركزي للمسافة العرضية- w للرأس v على أنه [5]:

$$e_w(v) = \max_{u \in V(G)} \{d_w(u, v)\} ,$$

ويعرف قطر المسافة العرضية- w للبيان G على أنه

$$\delta_w(G) = \text{diam}_w G = \max_{v \in V(G)} e_w(v) = \max_{v, u \in V(G)} \{d_w(u, v)\} .$$

كما يعرف نصف القطر للمسافة العرضية- w للبيان G على أنه

$$r_w(G) = \text{rad}_w G = \min_{v \in V(G)} e_w(v) .$$

تعرف متعددة حدود هوسويا للمسافة العرضية- w كالتالي :

$$H_w(G; x) = \sum_{k=m_w}^{\delta_w} C_w(G, k) x^k ,$$

إذ أن

$$m_w = m_w(G) = \min_{u, v \in V(G)} \{d_w(u, v)\} ,$$

يعرف دليل وينر للمسافة العرضية- w على أنه مجموع المسافات العرضية- w في البيان G ، أي أن

$$W_w(G) = \sum_{u, v \in V(G)} d_w(u, v | G) ,$$

من الواضح أن

$$W_w(G) = \frac{d}{dx} H_w(G; x) \Big|_{x=1} = \sum_{k=m_w}^{\delta_w} k C_w(G, k) ,$$

ليكن v رأسا في البيان المتصل G ، فأن متعددة حدود هوسويا للمسافة العرضية- w للرأس v تعرف كالتالي

[1]:

$$H_w(v, G; x) = \sum_{k \geq m_w}^{\delta_w} C_w(v, G, k) x^k ,$$

إذ أن $C_w(v, G, k)$ يمثل عدد رؤوس البيان G التي كل منها تبعد بمسافة عرضية- w تساوي k عن الرأس

v . واضح أن

$$\sum_{v \in V} H_w(v, G; x) = 2H_w(G; x) .$$

ليكن G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين بالنسبة للرؤوس ، يعرف اتصال البيانين G_1 و G_2 ، والذي يرمز له بـ $G_1 + G_2$ على أنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G_1) \cup V(G_2)$ ومجموعة حافته هي

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}.$$

للاطلاع على بعض المفاهيم والمصطلحات الواردة في هذا البحث يمكن الرجوع إلى المصدر [4].
من الواضح أن الاتصال لأي بيانين تامين يكون بياناً تاماً لذا لا ضرورة لإيجاد متعددة حدود هوسويا-
 w له.

2. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال بيانين ثنائيي التجزئة تامين:

ليكن K_{p_1, p_2} و K_{p_3, p_4} بيانين ثنائيي التجزئة تامين برتبة $p_1 + p_2$ و $p_3 + p_4$ على التوالي. وليكن $p_1 \leq p_2$ و $p_3 \leq p_4$ عندها يكون عامل الاتصال [4] لـ $K_{p_1, p_2} + K_{p_3, p_4}$ هو $k_0 = p_1 + p_3 + \min\{p_2, p_4\}$ ، نفرض أن

$$V(K_{p_1, p_2}) = V_{p_1} \cup V_{p_2} ,$$

$$V(K_{p_3, p_4}) = V_{p_3} \cup V_{p_4} ,$$

حيث أن V_{p_1} و V_{p_2} مجموعتا تجزئة رؤوس البيان K_{p_1, p_2} ، وأن V_{p_3} و V_{p_4} مجموعتا تجزئة رؤوس البيان K_{p_3, p_4} . وللسهولة سوف نرمز للبيان $K_{p_1, p_2} + K_{p_3, p_4}$ بالرمز G_b .

لإيجاد متعددة حدود هوسويا- w للبيان G_b سوف نأخذ ثلاث حالات لتوضيح البرهان . سوف نفرض

$$. k_0(G_b) = p_1 + p_2 + p_3 \text{ وأن } p_2 \leq p_3 \text{ وبذلك يكون عامل الاتصال لهذا البيان هو}$$

الحالة الأولى: إذا كان $u, v \in V_{p_i}$ ، لكل $i = 1, 2, 3, 4$ ، فأن هناك $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^4 p_j$ من الدروب المنفصلة داخليا كل

منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2 , \quad \forall 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_3 .$$

الحالة الثانية: 1. إذا كان $u \in V_{p_1}$ و $v \in V_{p_2}$ ، فأن هناك درباً بطول 1 و $p_3 + p_4$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و $p_1 - 1$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2 , \quad \forall 2 \leq w \leq p_3 + p_4 + 1 ,$$

$$d_w(u, v) = 3 , \quad \forall p_3 + p_4 + 2 \leq w \leq p_1 + p_3 + p_4 .$$

2. إذا كان $u \in V_{p_3}$ و $v \in V_{p_4}$ ، فأن هناك درباً بطول 1 و $p_1 + p_2$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و $p_3 - 1$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2 , \quad \forall 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + 1 ,$$

$$d_w(u, v) = 3 , \quad \forall p_1 + p_2 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_3 .$$

الحالة الثالثة: 1. إذا كان $u \in V_{p_1}$ و $v \in V_{p_3}$ ، فأن هناك درباً بطول 1 و $p_2 + p_4$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و $p_1 - 1$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2 , \quad \forall 2 \leq w \leq p_2 + p_4 + 1 ,$$

$$d_w(u, v) = 3 , \quad \forall p_2 + p_4 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_4 .$$

2. إذا كان $u \in V_{p_1}$ و $v \in V_{p_4}$ ، فإن هناك درجاً بطول 1 و $p_2 + p_3$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 2 و $p_1 - 1$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 3. لذا فإن

$$d_w(u, v) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_2 + p_3 + 1,$$

$$d_w(u, v) = 3, \quad \forall p_2 + p_3 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_3.$$

3. إذا كان $u \in V_{p_2}$ و $v \in V_{p_3}$ ، فإن هناك درجاً بطول 1 و $p_1 + p_4$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 2 و $p_2 - 1$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 3. لذا فإن

$$d_w(u, v) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_1 + p_4 + 1,$$

$$d_w(u, v) = 3, \quad \forall p_1 + p_4 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_4.$$

4. إذا كان $u \in V_{p_2}$ و $v \in V_{p_4}$ ، فإن هناك درجاً بطول 1 و $p_1 + p_3$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 2 و $p_2 - 1$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 3. لذا فإن

$$d_w(u, v) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_1 + p_3 + 1,$$

$$d_w(u, v) = 3, \quad \forall p_1 + p_3 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_3.$$

من الحالات الثلاثة السابقة يمكن أن نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.2: ليكن $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ و $N = \sum_{i=1}^4 \binom{p_i}{2}$ ، فإن

$$1. H_w(G_b; x) = \frac{1}{2} p(p-1)x^2, \quad 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + 1.$$

$$2. H_w(G_b; x) = \left\{ \frac{1}{2} p(p-1) - p_3 p_4 \right\} x^2 + p_3 p_4 x^3, \quad p_1 + p_2 + 2 \leq w \leq p_1 + p_3 + 1.$$

$$3. H_w(G_b; x) = \left\{ \frac{1}{2} p(p-1) - (p_2 + p_3) p_4 \right\} x^2 + (p_2 + p_3) p_4 x^3,$$

إذا كان $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$ و $p_1 + p_3 + 2 \leq w \leq p_1 + p_4 + 1$

أو $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$ و $p_1 + p_3 + 2 \leq w \leq p_2 + p_3 + 1$.

$$4. H_w(G_b; x) = \left\{ \frac{1}{2} p(p-1) - p_2 p_3 - (p_2 + p_3) p_4 \right\} x^2 + \left\{ p_2 p_3 + (p_2 + p_3) p_4 \right\} x^3,$$

إذا كان $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$ و $p_1 + p_4 + 2 \leq w \leq p_2 + p_3 + 1$

$$H_w(G_b; x) = \left\{ \frac{1}{2} p(p-1) - (p_1 + p_2 + p_3) p_4 \right\} x^2 + (p_1 + p_2 + p_3) p_4 x^3$$

إذا كان $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$ و $p_2 + p_3 + 2 \leq w \leq p_1 + p_4 + 1$

$$5. H_w(G_b; x) = \left\{ N + p_1(p_2 + p_3) \right\} x^2 + \left\{ p_4(p_1 + p_2 + p_3) + p_2 p_3 \right\} x^3,$$

إذا كان $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$ و $p_2 + p_3 + 2 \leq w \leq p_2 + p_4 + 1$

أو $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$ و $p_1 + p_4 + 2 \leq w \leq p_2 + p_4 + 1$

$$6. H_w(G_b; x) = \left\{ N + p_1 p_2 \right\} x^2 + \left\{ (p_4 + p_3)(p_1 + p_2) + p_3 p_4 \right\} x^3,$$

$p_2 + p_4 + 2 \leq w \leq p_3 + p_4 + 1.$

$$7. H_w(G_b; x) = N x^2 + \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 p_i p_j \right\} x^3, \quad p_3 + p_4 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_3. \quad \#$$

نتيجة 2.2: ليكن $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ، فأن

1. $W_w(G_b) = p(p-1)$, $2 \leq w \leq p_1 + p_2 + 1$.
2. $W_w(G_b) = p(p-1) + p_3 p_4$, $p_1 + p_2 + 2 \leq w \leq p_1 + p_3 + 1$.
3. $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_2 + p_3)p_4$,
 إذا كان $p_1 + p_3 + 2 \leq w \leq p_1 + p_4 + 1$ و $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$
 أو $p_1 + p_3 + 2 \leq w \leq p_2 + p_3 + 1$ و $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$
4. $W_w(G_b) = p(p-1) + p_2 p_3 + (p_2 + p_3)p_4$,
 إذا كان $p_1 + p_4 + 2 \leq w \leq p_2 + p_3 + 1$ و $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$
 $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_1 + p_2 + p_3)p_4$
 إذا كان $p_2 + p_3 + 2 \leq w \leq p_1 + p_4 + 1$ و $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$
5. $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_1 + p_2 + p_3)p_4 + p_2 p_3$,
 إذا كان $p_2 + p_3 + 2 \leq w \leq p_2 + p_4 + 1$ و $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$
 أو $p_1 + p_4 + 2 \leq w \leq p_2 + p_4 + 1$ و $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$
6. $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_4 + p_3)(p_1 + p_2) + p_3 p_4$,
 $p_2 + p_4 + 2 \leq w \leq p_3 + p_4 + 1$.
7. $W_w(G_b) = p(p-1) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 p_i p_j$, $p_3 + p_4 + 2 \leq w \leq p_1 + p_2 + p_3$. #

نتيجة 3.2: إذا كان $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = m$ ، فأن

$$H_w(G_b; x) = \begin{cases} 2m(4m-1)x^2 , & 2 \leq w \leq 2m+1 \\ 2m(m-1)x^2 + 6m^2x^3 , & 2(m+1) \leq w \leq 3m \end{cases} . \quad \dots(3.2.1)$$

البرهان: لتوضيح البرهان نأخذ حالتين فقط

الحالة الأولى: إذا كان $u, v \in V_{p_i}$ ، لكل $i = 1, 2, 3, 4$ ، فأن هناك $3m$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2 , \quad \forall 2 \leq w \leq 3m .$$

الحالة الثانية: إذا كان $u \in V_{p_i}$ و $v \in V_{p_j}$ ، لكل $i \neq j$ حيث أن $i = 1, 2, 3$ وأن $j = i+1$ ، فأن هناك درباً بطول 1 و $2m$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و $m-1$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2 , \quad \forall 2 \leq w \leq 2m+1 ,$$

$$d_w(u, v) = 3 , \quad \forall 2(m+1) \leq w \leq 3m .$$

من الحالتين أعلاه يمكن الحصول على الصيغة (3.2.1).

نتيجة 4.2: إذا كان $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = m$ ، فأن

$$W_w(G_b) = \begin{cases} 4m(4m-1) , & 2 \leq w \leq 2m+1 \\ 2m(11m-2) , & 2(m+1) \leq w \leq 3m \end{cases} . \quad \#$$

3. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال دربين:

ليكن P_{p_1} و P_{p_2} دربين منفصلين برتبة p_1 و p_2 على التوالي حيث أن $p_1 \leq p_2$. وليكن $G_p = P_{p_1} + P_{p_2}$ عندها يكون عامل الاتصال للبيان G_p هو $k_0(G_p) = p_1 + 1$ ، وبفرض أن $V(G_p) = V(P_{p_1}) \cup V(P_{p_2})$ ، حيث أن $V(P_{p_1})$ و $V(P_{p_2})$ هما مجموعتا رؤوس P_{p_1} و P_{p_2} على التوالي والتي هي

$$V(P_{p_1}) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{p_1}\}$$

$$V(P_{p_2}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p_2}\}$$

لإيجاد متعددة حدود هوسويا نأخذ الحالات الآتية:

الحالة الأولى: 1. إذا كان $u, u' \in V(P_{p_1})$ ، فإن هناك p_2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. بالإضافة إلى درب واحد بطول k حيث أن $1 \leq k \leq p_1 - 1$ ، لذا فإن

$$d_w(u, u') = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_1 + 1, \quad p_1 < p_2,$$

$$d_{p_1+1}(u, u') = 2, \quad k = 1, 2, \quad p_1 = p_2,$$

$$d_{p_1+1}(u, u') = 2, \quad 3 \leq k \leq p_1 - 1, \quad p_1 = p_2.$$

2. إذا كان $v, v' \in V(P_{p_2})$ ، فإن هناك p_1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. بالإضافة إلى درب بطول k حيث أن $1 \leq k \leq p_2 - 1$ ، لذا فإن

$$d_w(v, v') = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_1$$

$$d_{p_1+1}(v, v') = 2, \quad k = 1, 2,$$

$$d_{p_1+1}(v, v') = k, \quad 3 \leq k \leq p_2 - 1.$$

الحالة الثانية: 1. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1}), v_j \in V(P_{p_2})$ ، حيث أن $i = 2, 3, \dots, p_1 - 1$ ، فإن هناك درب بطول 1، وأربعة دروب منفصلة داخليا كل منها بطول 2 بالإضافة إلى $p_1 - 3$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3 عندئذ يكون

$$d_w(u_i, v_j) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq 5,$$

$$d_w(u_i, v_j) = 3, \quad \forall 6 \leq w \leq p_1 + 1.$$

2. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1}), v_j \in V(P_{p_2})$ ، حيث أن $i = 1, p_1$ و $j = 1, p_2$ ، فإن هناك درباً بطول 1 ودربين بطول 2 و $p_1 - 2$ من الدروب بطول 3، وعليه فإن

$$d_w(u_i, v_j) = 2, \quad w = 2, 3,$$

$$d_w(u_i, v_j) = 3, \quad \forall 4 \leq w \leq p_1 + 1.$$

3. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1}), v_j \in V(P_{p_2})$ ، حيث أن $i = 1, p_1$ و $j = 2, 3, \dots, p_2 - 1$ ، فإن هناك درباً بطول 1 وثلاثة دروب بطول 2 و $p_1 - 2$ من الدروب بطول 3 إذا كان $p_1 < p_2$ (أو $p_1 - 3$ من الدروب بطول 3 إذا كان $p_1 = p_2$). لذا فإن

$$d_w(u_i, v_j) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq 4,$$

$$d_w(u_i, v_j) = 3, \quad \forall 5 \leq w \leq p_1 + 1.$$

4. إذا كان $v_j \in V(P_{p_2}), u_i \in V(P_{p_1})$ ، حيث أن $i = 2, 3, \dots, p_1 - 1$ و $j = 1, p_2$ ، فإن هناك درياً بطول 1 وثلاثة دروب بطول 2 و $p_1 - 3$ من الدروب بطول 3. لذا فإن

$$d_w(u_i, v_j) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq 4,$$

$$d_w(u_i, v_j) = 3, \quad \forall 5 \leq w \leq p_1 + 1.$$

من الحالات أعلاه نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة (1.3): لكل $p_1 < p_2$ حيث أن $p_1 \geq 6$ و $w \leq p_1 + 1$ ، فإن

$$H_w(G_P; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right) x^2, \quad w = 2, 3,$$

$$H_4(G_P; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 - 2 \right) x^2 + 2x^3,$$

$$H_5(G_P; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1(p_2 - 2) \right) x^2 + 2p_1 x^3,$$

$$H_w(G_P; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} \right) x^2 + p_1 p_2 x^3, \quad 6 \leq w \leq p_1,$$

$$H_{p_1+1}(G_P; x) = \left(\binom{p_1}{2} + 2p_2 - 3 \right) x^2 + p_1 p_2 x^3 + \sum_{k=3}^{p_2-1} (p_2 - k) x^k. \quad \#$$

من السهولة الحصول على صيغة مشابهة للمبرهنة 1.3 عندما $p_1 = p_2 = m$.

نتيجة (2.3): لكل $p_1 < p_2$ و $w \leq p_1 + 1$ ، فإن

$$W_w(G_P) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right), \quad w = 2, 3,$$

$$W_4(G_P) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 + 1 \right),$$

$$W_5(G_P) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1(p_2 + 1) \right),$$

$$W_w(G_P) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} \right) + 3p_1 p_2, \quad 6 \leq w \leq p_1,$$

$$W_{p_1+1}(G_P) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2+1}{3} \right) + 3p_1 p_2 + p_2 + 1. \quad \#$$

4. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال دارتين:

ليكن C_{p_1} و C_{p_2} دارتين منفصلتين برتبة p_1 و p_2 على التوالي حيث $p_1 \leq p_2$. وليكن $G_C = C_{p_1} + C_{p_2}$ عندها يكون عامل الاتصال للبيان G_C هو $k_0(G_C) = p_1 + 2$ ، وبفرض أن $V(G_C) = V(C_{p_1}) \cup V(C_{p_2})$. لكي نجد متعددة حدود هوسويا- w لـ G_C نأخذ الحالات الآتية:

الحالة الأولى: 1. إذا كان $u, v \in V(C_{p_1})$ وكان $d(u, v|C_{p_1}) = k$ ، فإن هناك دربين منفصلين داخليا أحدهما بطول k والآخر $p_1 - k$ ، حيث أن $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_1}{2} \right\rfloor$ و p_2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فإن

$$\begin{aligned} d_w(u, v) &= 2, \forall 2 \leq w \leq p_1 + 2, \text{ if } p_1 + 2 \leq p_2, \\ d_{p_1+2}(u, v) &= 2, k = 1, 2, \text{ if } p_1 + 1 = p_2 \text{ or } p_1 = p_2, \\ d_{p_1+2}(u, v) &= k, 3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_1}{2} \right\rfloor \text{ if } p_1 + 1 = p_2, \\ d_{p_1+2}(u, v) &= p_1 - k, 3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_1}{2} \right\rfloor \text{ if } p_1 = p_2. \end{aligned}$$

2. إذا كان $u, v \in V(C_{p_2})$ وكان $d(u, v|C_{p_2}) = k$ ، فإن هناك دربين أحدهما بطول k والآخر $p_2 - k$ ، حيث أن $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor$ و p_1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فإن

$$\begin{aligned} d_w(u, v) &= 2, \forall 2 \leq w \leq p_1, \\ d_{p_1+1}(u, v) &= 2, k = 1, 2, \quad d_{p_1+1}(u, v) = k, 3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor, \\ d_{p_1+2}(u, v) &= 2, k = 1, 2, \quad d_{p_1+2}(u, v) = p_2 - k, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

الحالة الثانية: إذا كان $u \in V(C_{p_1})$ ، $v \in V(C_{p_2})$ ، فإن هناك درباً بطول 1 وأربعة دروب منفصلة داخليا بطول 2 بالإضافة إلى $p_1 - 3$ من الدروب المنفصلة داخليا وكل منها بطول 3، وعليه فإن

$$\begin{aligned} d_w(u, v) &= 2, 2 \leq w \leq 5, \\ d_w(u, v) &= 3, \forall 6 \leq w \leq p_1 + 2. \end{aligned}$$

من الحالتين الأولى والثانية نحصل على

مبرهنة (1.4): لكل $p_1 + 2 \leq p_2$ ، حيث أن $p_1 \geq 6$ ، فإن

$$H_w(G_C; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right) x^2, \forall 2 \leq w \leq 5,$$

$$H_w(G_C; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} \right) x^2 + p_1 p_2 x^3, \forall 6 \leq w \leq p_1.$$

$$H_{p_1+1}(G_C; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + 2p_2 \right) x^2 + p_1 p_2 x^3 + p_2 \sum_{k=3}^{\left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor - 1} x^k + \begin{cases} p_2 x^{\frac{p_2-1}{2}}, & p_2 \text{ odd} \\ \frac{p_2}{2} x^{\frac{p_2}{2}}, & p_2 \text{ even} \end{cases}$$

$$H_{p_1+2}(G_C; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + 2p_2 \right) x^2 + p_1 p_2 x^3 + p_2 \sum_{k=3}^{\left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor - 1} x^{p_2-k} + \begin{cases} p_2 x^{\frac{p_2+1}{2}}, & p_2 \text{ odd} \\ \frac{p_2}{2} x^{\frac{p_2}{2}}, & p_2 \text{ even} \end{cases}$$

#

يمكن الحصول على صيغ مقاربة لمبرهنة 1.4 عندما $p_1 + 1 = p_2$ و $p_1 = p_2$ من الحالات السابقة.
نتيجة (2.4): لكل $p_1 + 2 \leq p_2$ ، حيث أن $p_1 \geq 6$ ، فإن

$$W_w(G_C) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right), \forall 2 \leq w \leq 5,$$

$$W_w(G_C) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} \right) + 3p_1 p_2, \forall 6 \leq w \leq p_1.$$

$$W_{p_1+1}(G_C) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor \right) + p_2(3p_1 + 1) + \begin{cases} \frac{p_2(p_2-1)}{2}, & p_2 \text{ odd} \\ \left(\frac{p_2}{2} \right)^2, & p_2 \text{ even} \end{cases}$$

$$W_{p_1+2}(G_C) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + 2p_2 \right) + p_2 \left(\left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor \left(p_2 - \frac{2}{3} \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor - 1 \right) + (5 - 3p_2) \right) \\ + 3p_1 p_2 + \begin{cases} \frac{p_2(p_2+1)}{2}, & p_2 \text{ odd} \\ \left(\frac{p_2}{2} \right)^2, & p_2 \text{ even.} \end{cases} \quad \#$$

5. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال نجمتين:

ليكن S_{p_1} و S_{p_2} نجمتين منفصلتين برتبة p_1 و p_2 على التوالي حيث $p_1 \leq p_2$. وليكن $G_S = S_{p_1} + S_{p_2}$ عندها يكون عامل الاتصال للبيان G_S هو $k_0(G_S) = p_1 + 1$ ، وبفرض أن $V(G_S) = V(S_{p_1}) \cup V(S_{p_2})$. من أجل إيجاد متعددة حدود هوسويا w لـ G_S نفرض أن u' هو الرأس المتجاور مع جميع الرؤوس في النجمة S_{p_1} ، وان v' هو الرأس المتجاور مع جميع الرؤوس في النجمة S_{p_2} عندها يكون لدينا الحالات التالية:

الحالة الأولى: 1. إذا كان $u, v \in V(S_{p_1})$ وأي من الرأسين لا يمثل u' عندها نلاحظ وجود $p_2 + 1$ من الدروب المنفصلة داخليا تصل بين u و v وكل منها بطول 2. أما إذا كان احد الرأسين يمثل u' نجد أن هناك درباً بطول واحد و p_2 من دروب منفصلة داخليا كل منها بطول 2. عندئذ نحصل على

$$d_w(u, v) = 2, \forall 2 \leq w \leq p_1 + 1.$$

2. إذا كان $u, v \in V(S_{p_2})$ وأي من الرأسين لا يمثل v' عندها نلاحظ وجود $p_1 + 1$ من الدروب المنفصلة داخليا تصل بين u و v وكل منها بطول 2. أما إذا كان احد الرأسين يمثل v' نجد أن هناك درباً بطول واحد و p_1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. عندئذ نحصل على

$$d_w(u, v) = 2, \forall 2 \leq w \leq p_1 + 1.$$

الحالة الثانية: 1. إذا كان $u \in V(S_{p_1}) - \{u'\}$ و $v \in V(S_{p_2}) - \{v'\}$ فان هناك درباً بطول 1 ودرابين بطول 2 و $p_1 - 2$ من الدروب المنفصلة داخليا وكل منها بطول 3، وعليه فان

$$d_w(u, v) = 2, w = 2, 3,$$

$$d_w(u, v) = 3, \quad \forall 4 \leq w \leq p_1 + 1$$

2. إذا كان $u = u'$ و $v \in V(S_{p_2}) - \{v'\}$ ، فإن هناك درجاً بطول 1 و p_1 من الدروب المنفصلة داخلياً بطول 2، لذا فأن

$$d_w(u', v) = 2, \quad 2 \leq w \leq p_1 + 1.$$

3. إذا كان $u \in V(S_{p_1})$ و $v = v'$ ، فإن هناك درجاً بطول 1 و p_2 من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 2، لذا فأن

$$d_w(u', v) = 2, \quad 2 \leq w \leq p_1 + 1.$$

4. إذا كان $u = u'$ و $v = v'$ ، فإن هناك درجاً بطول 1 و $p_1 + p_2 - 2$ من الدروب المنفصلة داخلياً وكل منها بطول 2. أي أن

$$d_w(u', v') = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_1 + 1$$

من الحالتين السابقتين نحصل على المبرهنة التالية :

مبرهنة (1.5): لكل $p_1 \leq p_2$ فان :

$$H_w(G_S; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right) x^2, \quad w = 2, 3,$$

$$H_w(G_S; x) = \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + (p_1 + p_2 - 1) \right) x^2 + (p_1 - 1)(p_2 - 1)x^3, \quad \forall 4 \leq w \leq p_1 + 1. \#$$

نتيجة (2.5): لكل $p_1 \leq p_2$ فان:

$$W_w(G_S) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right), \quad w = 2, 3,$$

$$W_w(G_S) = 2 \left(\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + p_1 p_2 \right) + (p_1 - 1)(p_2 - 1), \quad \forall 4 \leq w \leq p_1 + 1. \#$$

6. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال عجلتين:

ليكن W_{p_1} و W_{p_2} عجلتين برتبة p_1 و p_2 على التوالي، وأن

$$V(W_{p_1}) = \{w_1, w_2, \dots, w_{p_1-1}, c_1\}, \quad \deg c_1 = p_1 - 1.$$

$$V(W_{p_2}) = \{y_1, y_2, \dots, y_{p_2-1}, c_2\}, \quad \deg c_2 = p_2 - 1.$$

من الواضح أن عامل الاتصال للبيان $G_W = W_{p_1} + W_{p_2}$ هو $k_0(G_W) = \min\{p_1, p_2\} + 3$

ولإيجاد متعددة حدود هوسويا- w للبيان G_W سوف نعالج حالتين:

الأولى: إذا كان $u, v \in W_{p_i} - \{c_i\}$ ، لكل $i = 1, 2$ ، فأن هناك درجاً بطول k ، ودرجاً آخر بطول $p_i - 1 - k$ ،

حيث أن $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_i - 1}{2} \right\rfloor$ و $p_{3-i} + 1$ من الدروب المنفصلة داخلياً كل منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u, v) = 2, \quad \forall 2 \leq w \leq p_{3-i} + 1,$$

$$d_{p_{3-i}+2}(u, v) = 2, \quad k = 1, 2, \quad d_{p_{3-i}+2}(u, v) = k, \quad 3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_i - 1}{2} \right\rfloor,$$

$$d_{p_{3-i}+3}(u,v) = 2, k=1,2, d_{p_{3-i}+3}(u,v) = p_i - 1 - k, 3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{p_i - 1}{2} \right\rfloor.$$

أما إذا كان $u \in W_{p_i} - \{c_i\}$ و $v = c_i$ ، لكل $i=1,2$ ، فإن هناك درجاً بطول واحد و $p_{3-i} + 2$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فإن

$$d_w(u,v) = 2, \forall 2 \leq w \leq p_{3-i} + 3, i=1,2.$$

الثانية : 1. إذا كان $u \in V(W_{p_1}) - \{c_1\}$ و $v \in V(W_{p_2}) - \{c_2\}$ ، فإن هناك درجاً بطول واحد و 6 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، أي أن

$$d_w(u,v) = 2, \forall 2 \leq w \leq 7.$$

2. إذا كان $u = c_i$ و $v \in V(W_{p_{3-i}}) - \{c_{3-i}\}$ ، لكل $i=1,2$ ، فإن هناك درجاً بطول واحد و $p_i + 2$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، أي أن

$$d_w(c_i, v) = 2, \forall 2 \leq w \leq p_i + 3, i=1,2.$$

3. إذا كان $u = c_1$ و $v = c_2$ ، فإن هناك درجاً بطول واحد و $p_1 + p_2 - 2$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، أي أن

$$d_w(c_1, c_2) = 2, \forall 2 \leq w \leq p_1 + p_2 - 2.$$

من الحالتين السابقتين يمكن أن نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.6: لكل $p_1 \leq p_2$ ، ولكل $p_1 \geq 6$ فإن

- $H_w(G_W; x) = \frac{1}{2} \{p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + 2p_1p_2\}x^2$, if $2 \leq w \leq 7$.
- $H_w(G_W; x) = \frac{1}{2} \{p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + 2(p_1 + p_2 - 1)\}x^2$, if $8 \leq w \leq p_1 + 1$.
- $H_{p_1+2}(G_W; x) = \binom{p_1 - 1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{p_1 - 1}{2} \rfloor} x^k + \binom{p_2 - 1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{p_2 - 1}{2} \rfloor} x^k + \{p_1 + p_2 - 1\}x^2$.
- $H_{p_1+3}(G_W; x) = \binom{p_1 - 1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{p_1 - 1}{2} \rfloor} x^{p_1 - 1 - k} + \binom{p_2 - 1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{p_2 - 1}{2} \rfloor} x^{p_2 - 1 - k} + \{p_1 + p_2 - 1\}x^2$.

نتيجة 2.6: لكل $p_1 \leq p_2$ ، ولكل $p_1 \geq 6$ فإن

- $W_w(G_W) = \{p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + 2p_1p_2\}$, if $2 \leq w \leq 7$.
- $W_w(G_W) = \{p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + 2(p_1 + p_2 - 1)\}$, if $8 \leq w \leq p_1 + 1$.
- $W_{p_1+2}(G_W) = \frac{1}{2} \binom{p_1 - 1}{2} \left\lfloor \frac{p_1 - 1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p_1 + 1}{2} \right\rfloor + \binom{p_2 - 1}{2} \left\lfloor \frac{p_2 - 1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p_2 + 1}{2} \right\rfloor + 2\{p_1 + p_2 - 1\}$
- $W_{p_1+3}(G_W) = \frac{1}{2} \binom{p_1 - 1}{2} \left\{ 2(p_1 - 1) \left\lfloor \frac{p_1 - 3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p_1 - 1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p_1 + 1}{2} \right\rfloor + 2 \right\}$
 $+ \frac{1}{2} \binom{p_2 - 1}{2} \left\{ 2(p_2 - 1) \left\lfloor \frac{p_2 - 3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p_2 - 1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p_2 + 1}{2} \right\rfloor + 2 \right\} + 2\{p_1 + p_2 - 1\}$.

المصادر

- [1] A. A. Ali and A. S. Aziz; (2007), " w - Wiener Polynomials of the width Distance of some special graphs", Al-Rafiden J. vol. 4, No. 2, pp. 103-124.
- [2] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang; (1996), "The Wiener Polynomial of a Graph", Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969 .
- [3] D.F. Hsu; (1994), "On Container Width and Length in Graphs, Groups, and Networks", IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics communications and computer sciences", Vol. E77-A, No.4, pp. 668-680.
- [4] R. Diestel, (2005). "**Graph Theory**", Springer-Verlag Heidelberg, New York.
- [5] T. H. Ismail and A. M. Ali ; (2011), "Hosoya Polynomials of the width Distance of some Cog-Special Graphs", Al-Rafidain J. of Comp. Sci. and Math. Vol. 8, No. 2.